القيم القصوى المطلقة

نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات

إذا كانت الدالة $y = f(x)$

- معرفة ومتصلة على الفترة المغلقة [a , b]
- قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b)

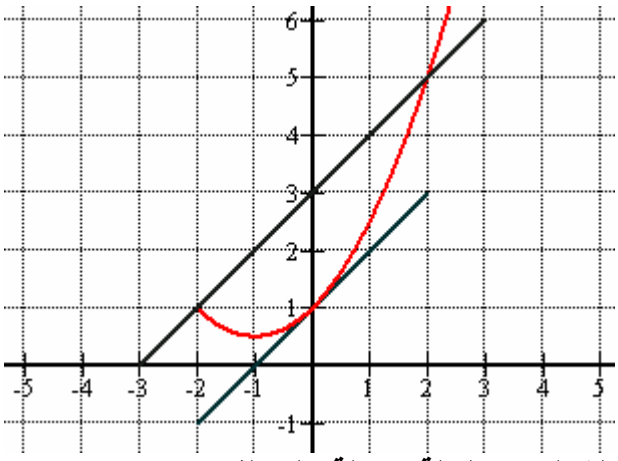
فأنه يوجد عدد واحد علي الأقل c في الفترة المفتوحة (a , b) يحقق العلاقة التالية

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان : يعتمد على نظرية رول ويتجاوز مستوي المنهاج .

التفسير الهندسي للنظرية :

ميل المستقيم AB حيث : A(a , f(a)) , B(b ,f(b)) يوازي ميل المماس للمنحني عند النقطة c .

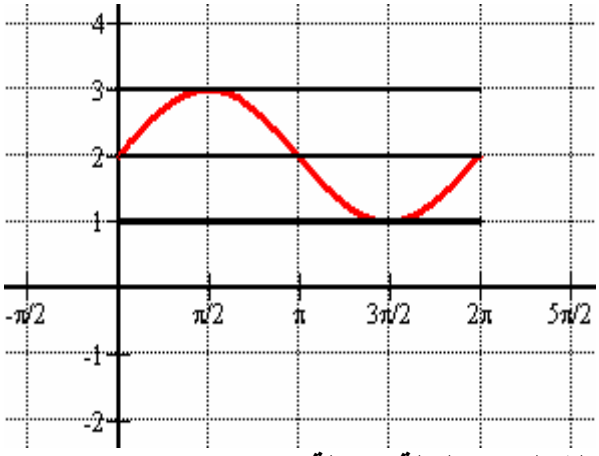


الشكل (1) الدالة متصلة على الفترة [-2,2]

الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (2 , -2)

المماس عند x=0 يوازي الوتر المار

بالنقطتين (2,f(2)) , (-2,f(-2))



الشكل (2) الدالة متصلة [2π , 0]

الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (2π , 0)

المماس عند كل من $x=\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}$

يوازي الوتر المار بالنقطتين (4, 2π) , (2, 0)

تمارين أولا حل تمارين كراسة التمارين ص14 (6:8) ، ص15 (8:12)

ثانياً في كل تمرين مما يأتي

(أ) أثبت أن الدالة تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاه [a , b]

(ب) أوجد قيمة c في (a , b) حيث $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(ت) أكتب معادلة الوتر AB حيث A=(a , f(a)) B=(b , f(b))

(ث) أكتب معادلة المماس الموازي للوترAB عند النقطة c

* ممدوح أمين *

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$; $[0 , 2]$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

(أ) *الدالة* $f(x)$ **كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية** R

∴ الدالة $f(x)$ **متصلة على الفترة المغلقة** $[0 ,2]$ **و قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة** $(0 , 2)$

∴ الدالة $f(x)$ **تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة .**

(ب)

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$3c^2 - 4c + 1 = 1$ ∴ $3c^2 - 4c = 0$

$c(3c - 4) = 0$ ∴ $c = 0 \notin (0 , 2)$; $c = 4/3 \in (0 , 2)$

(ت) معادلة الوتر AB

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 1(x - 2) = x - 2$ ∴ $y = x$

(ث) معادلة المماس للمنحني عند النقطة c. نوجد $f(c)$

$$f(\tfrac{4}{3}) = (\tfrac{4}{3})^3 - 2(\tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{4}{3} = \tfrac{4}{27}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \tfrac{4}{3} = 1(x - \tfrac{4}{27}) = x - \tfrac{4}{27}$$

$$y = x - \tfrac{4}{27} + \tfrac{4}{3}$$

$$y = x + \tfrac{32}{27}$$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$;$[1 , 3]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ [2 , 4]

(4) $f(x) = \sqrt{x-2}$; [2 , 3]

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(5) $f(x) = \cos x$; $[0 , \pi]$

ثالثاً : أتبت أن الدالة لا تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [a ,b]

ملاحظة : الدالة لا تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة إذ لم يتحقق أحد الشرطين أو كلاهما بمعني
إذا كانت الدالة غير متصلة على الفترة [a ,b] أو غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a ,b)

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x ; x > 2 \\ 5x - 3 ; x \le 2 \end{cases}$; $[0 , 3]$

(2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $[-1 , 1]$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $y = |x + 1|$; [-2 , 1]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

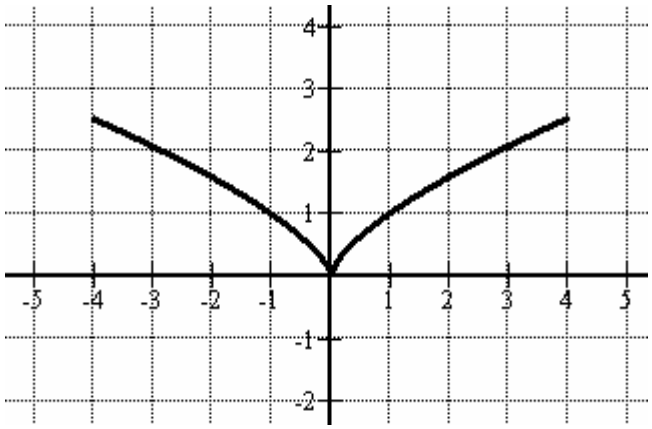
. . . . . .

. . . . . .

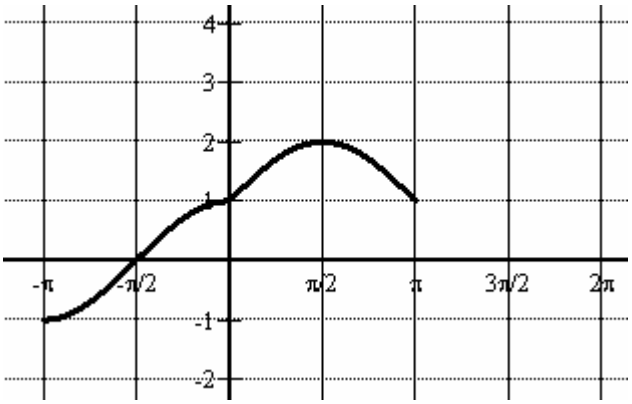
. . . . . .

. . . . . .

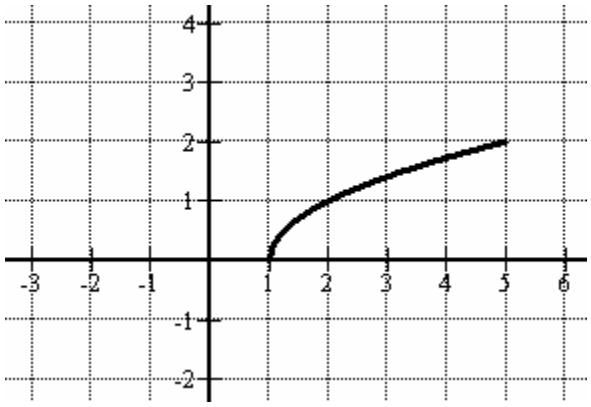
رابعاً :أياً من الدوال المبينة بالرسم تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاه:



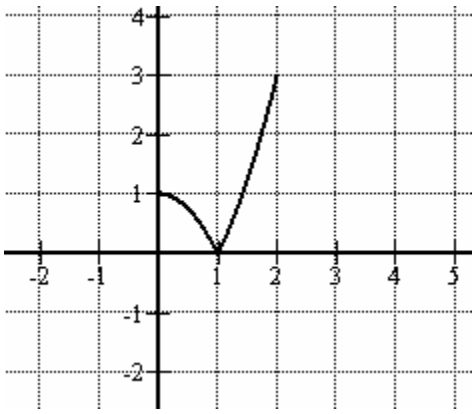
شكل(1) [-4 , 4]



شكل (2) [-π , π]



شكل (3) [1 , 5]



شكل (4) [0 , 2]

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

تطبيقات على نظرية القيمة المتوسطة

نتيجة (1) إذا كان: $f'(x)=0$ لكل $x\in[a\ ,\ b\ ]$ فأن $f(x)$ دالة ثابتة على الفترة $[a\ ,\ b]$.

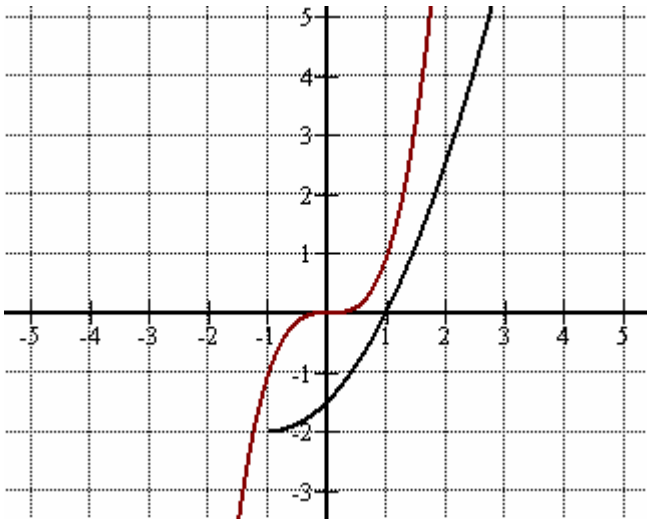
تمرين : أثبت أن $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ دالة ثابتة واوجد قيمة الثابت .

الإثبات :=

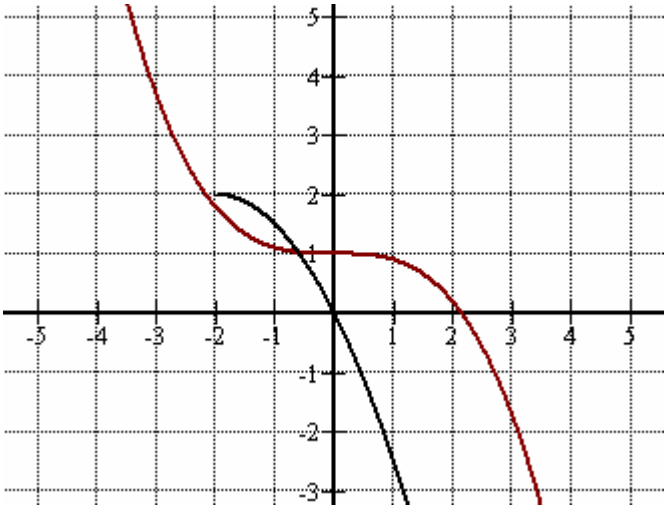
$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

∴ الدالة ثابتة و الثابت هو.....

الدالة التزايدية و الدالة التناقصية (الدالة المطردة)



الدالة التزايدية : $x_2>x_1\ \rightarrow f(x_2)>f(x_1)$



الدالة التناقصية : $x_2>x_1\ \rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

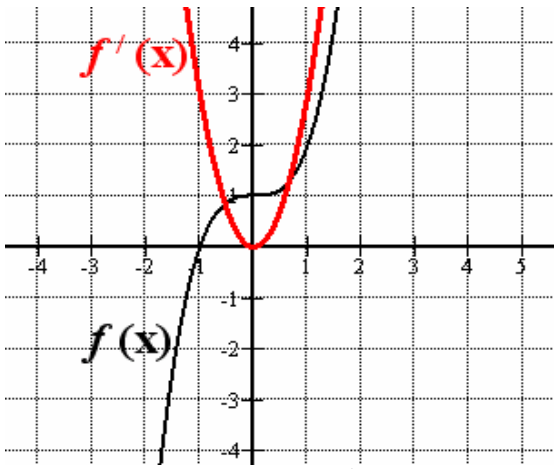
نتيجة (2) إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a\ ,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة$(a\ ,\ b)$ فأنه

(أ) إذا كانت $f'(x)>0$ لكل : $x\in(a\ ,b)$ فأن الدالة f تزايدية على الفترة $[a\ ,\ b]$

(ب) إذا كانت $f'(x)<0$ لكل : $x\in(a\ ,b)$ فأن الدالة f تناقصية على الفترة $[a\ ,\ b]$

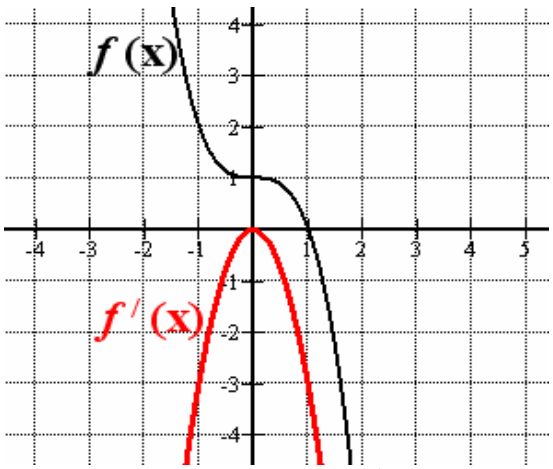
والعكس صحيح . إذا كانت الدالة تزايدية على فترة فمشتقتها موجبة على نفس الفترة .

وإذا كانت الدالة تناقصية على فترة فمشتقتها سالبة على نفس الفترة .



$f(x)$ دالة.....

∴ $f'(x)>$ .....



$f(x)$ دالة.....

∴ $f'(x)<$.....

* ممدوح أمين *

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

القيم القصوى النسبية :-

أولا عند النقاط الداخلية

إذا كانت الدالة معرفة على الفترة [a , b] ، $c \in (a , b)$ نقطة داخلية فأنه يكون

(1) للدالة قيمة عظمي نسبية عند c إذا كان : $f(c) \geq f(x)$ في فترة مفتوحة تحتوي c .

(2) للدالة قيمة صغري نسبية عند c إذا كان : $f(c) \leq f(x)$ في فترة مفتوحة تحتوي c .

العلاقة بين الاشتقاق و القيم القصوى النسبية

إذا كانت للدالة قيمة قصوى محلية عند نقطة داخلية c و الدالة قابلة للاشتقاق عند c فأن $f'(c)=0$.

النقطة الحرجة

للدالة $f(x)$ نقطة حرجة عند النقطة الداخلية c إذا كان $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

اختبار المشتقة الأولي للقيم القصوى المحلية عند النقطة الحرجة c

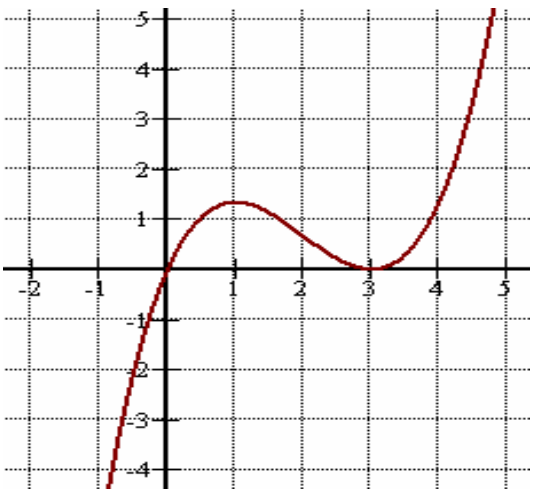
أولا

النقطة الحرجة	c	
	x < c	x > c
إشارة f'	+	-
سلوك الدالة f	الدالة تزايدية ↗	الدالة تناقصية ↘
	للدالة عند c قيمة عظمي محلية	

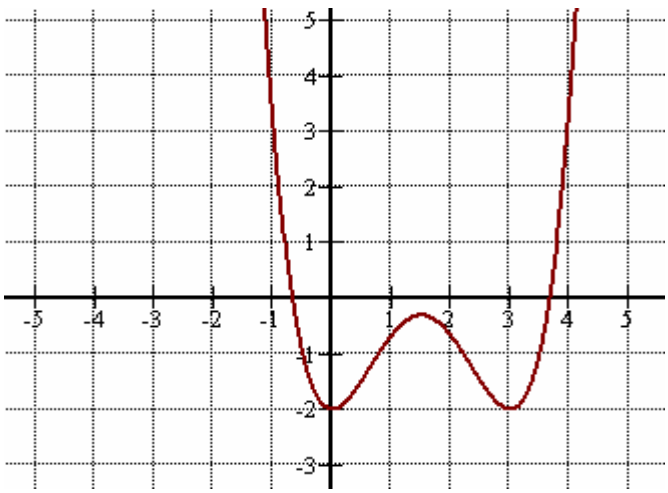
ثانيا :

النقطة الحرجة	c	
	x < c	x > c
إشارة f'	-	+
سلوك الدالة f	الدالة تناقصية ↘	الدالة تزايدية ↗
	للدالة عند c قيمة صغري محلية	

تمارين (1) الأشكال التالية تمثل الدالة f : عين النقاط الحرجة و حدد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى المحلية.



الشكل (1)



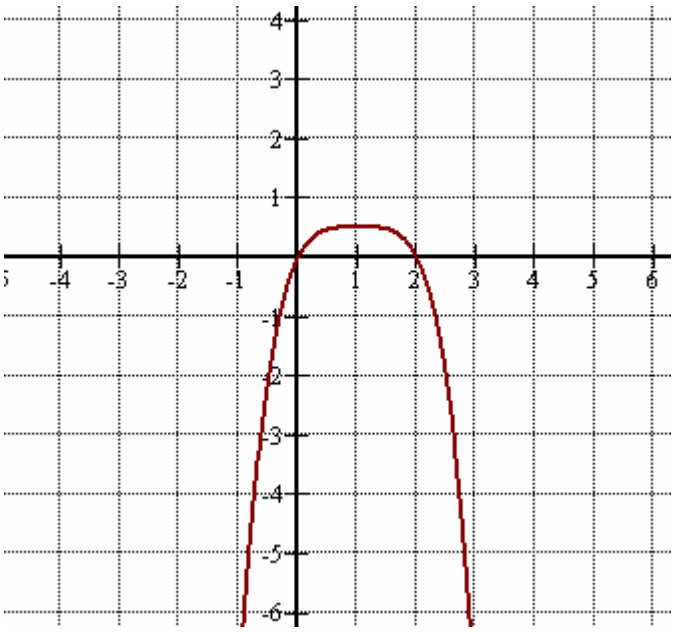
الشكل (2)

*** ممدوح أمين ***

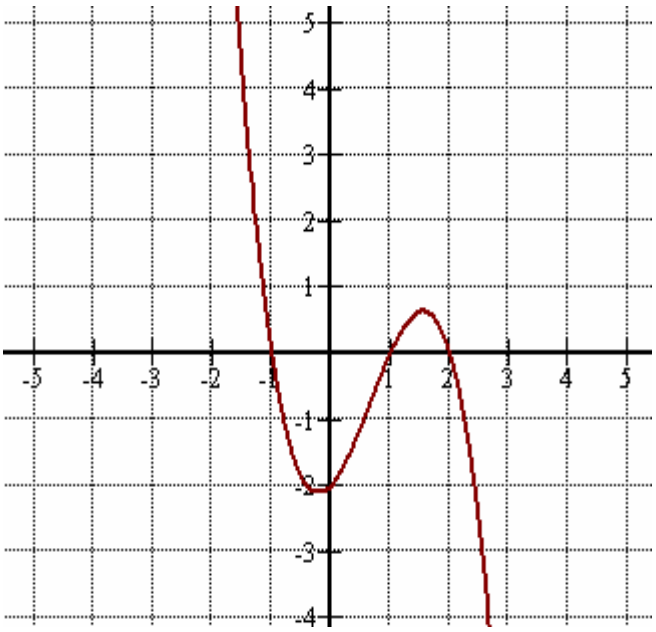
Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

	الشكل1	الشكل2
النقاط الحرجة		
فترات التزايد		
فترات التناقص		
القيم العظمي المحلية		
القيم الصغري المحلية		

(2) الأشكال التالية تمثل الدالة المشتقة f' : عين النقاط الحرجة و حدد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى المحلية.



الشكل (3)



الشكل (4)

	الشكل3	**الشكل4**
النقاط الحرجة		
فترات التزايد		
فترات التناقص		
القيم العظمي المحلية		
القيم الصغري المحلية		

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

القيم القصوى المحلية عند النقاط الطرفية

ثانياً عند النقط الطرفية

إذا كانت الدالة معرفة على الفترة [a , b] ، $c \in (a , b)$ فأنه يكون

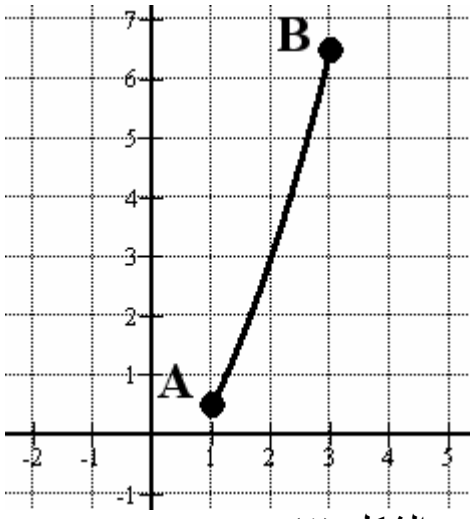
(3) للدالة قيمة عظمي نسبية عند a (نقطة طرفية) إذا كان : $f(a) \geq f(x)$; $x \in [a , c)$.

للدالة قيمة عظمي نسبية عند b(نقطة طرفية) إذا كان : $f(b) \geq f(x)$; or $x \in (c , b]$

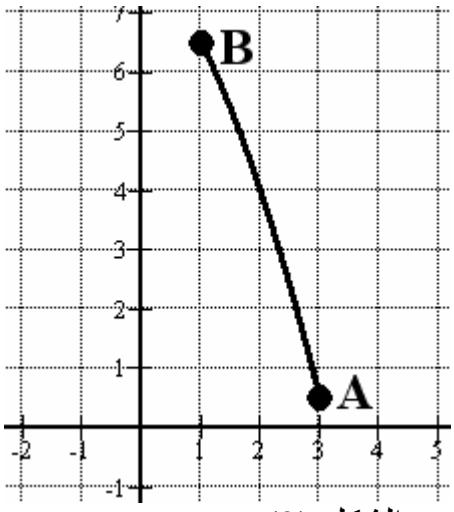
(4) للدالة قيمة صغري نسبية عند a (نقطة طرفية)إذا كان : $f(a) \leq f(x)$; $x \in [a , c)$.

للدالة قيمة صغري نسبية عند b (نقطة طرفية)إذا كان : $f(b) \leq f(x)$; $x \in (c , b]$.

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة[a , b] أو [b ,a) فأنه يمكن أن يكون لها قيمة قصوى محلية كما يلي

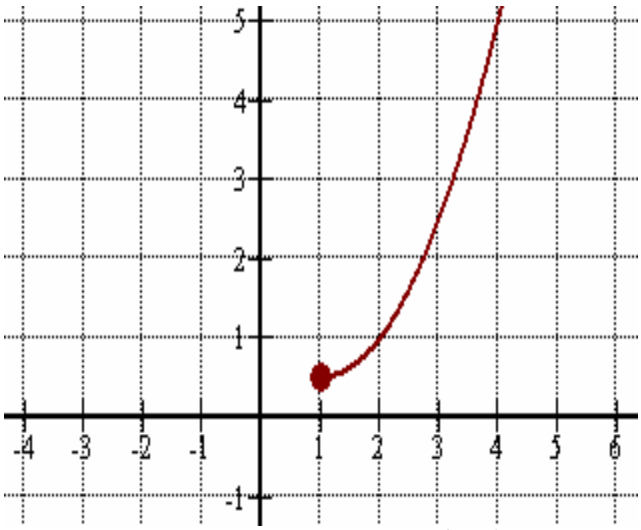


الشكل (1)

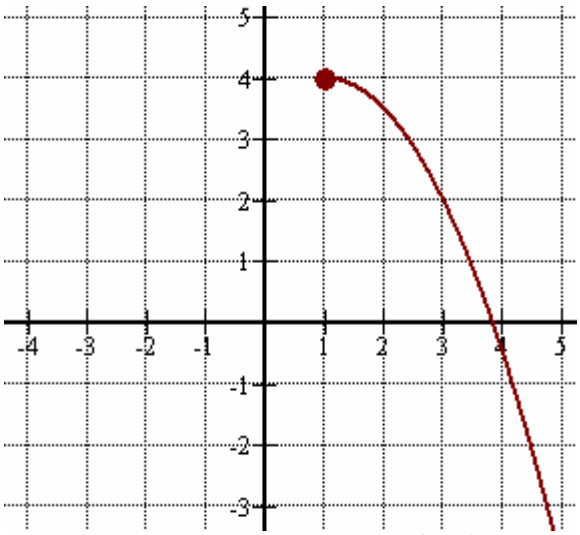


الشكل (2)

في الشكلين (1 ، 2) للدالة قيمة عظمى محلية عند B و قيمة صغرى محلية عند A

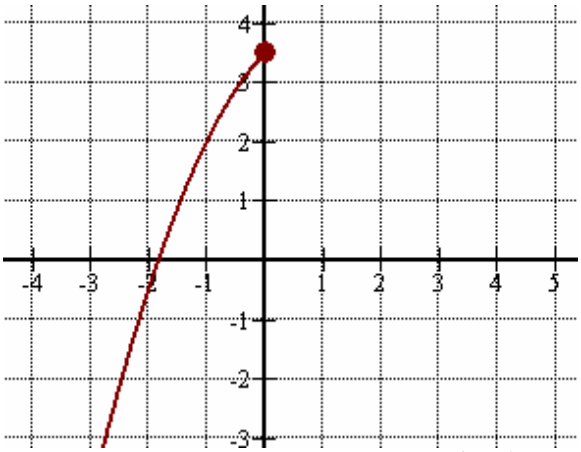


الشكل (3)

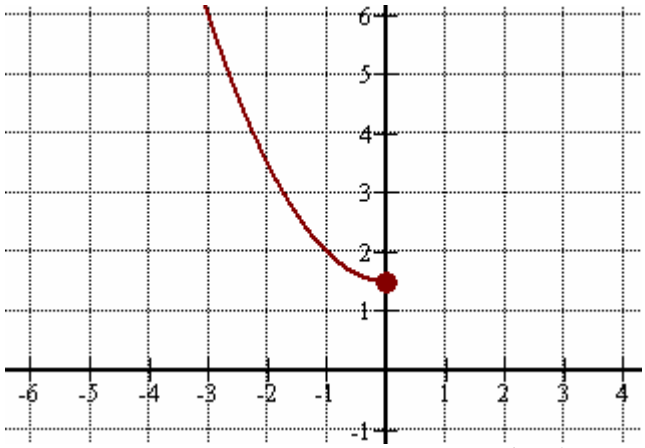


الشكل (4)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



الشكل (5)



الشكل (6)

تمارين

لكل تمرين مما يلي أوجد

(أ) أوجد النقاط الحرجة .

(ب) عين فترات التزايد و التناقص .

(ت) عين القيم القصوى المحلية .

(1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

(2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

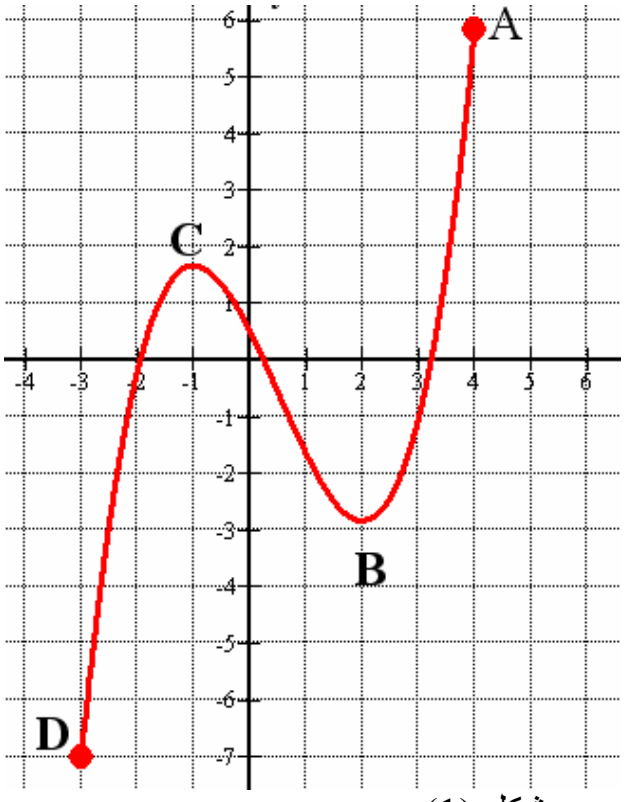
القيم القصوى المطلقة

تعريف : إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$

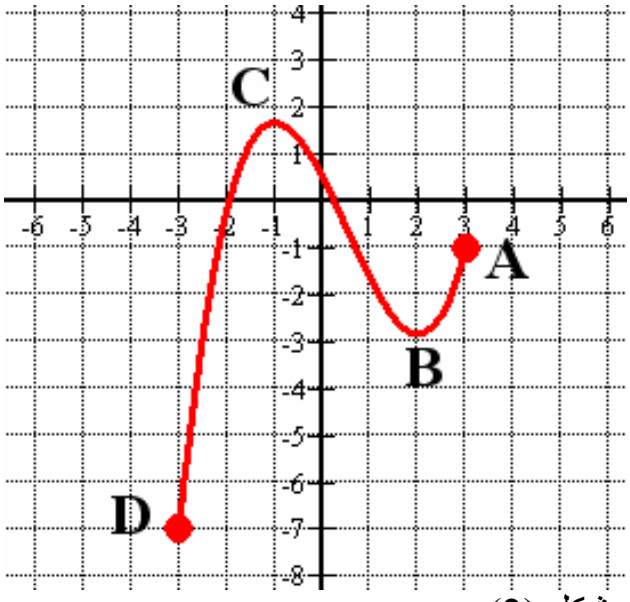
(1) للدالة قيمة عظمي مطلقة عند c إذا كان : $x \in [a\ ,\ b\ ]$, $f(c) \geq f(x)$

(2) للدالة قيمة صغري مطلقة عند c إذا كان : $x \in [a\ ,\ b\ ]$, $f(c) \leq f(x)$

تمرين : في الأشكال التالية حدد النقاط التي يكون للدالة عندها قيم قصوى مطلقة

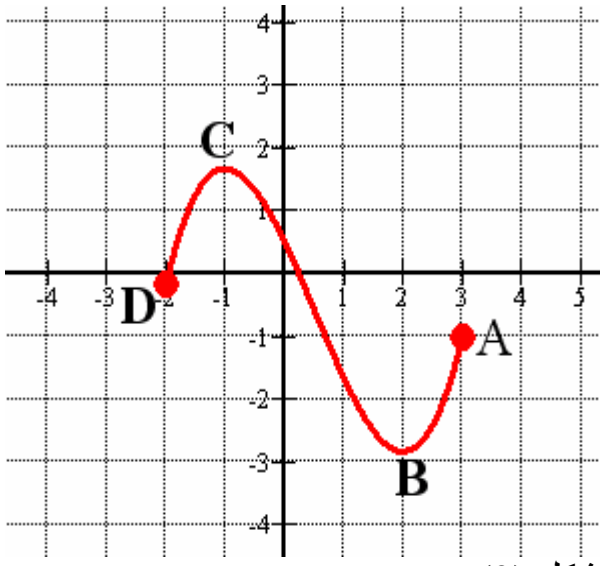


شكل (1)

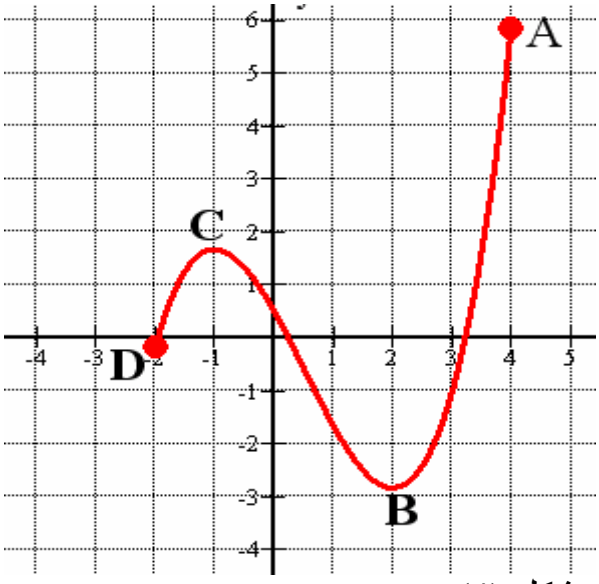


شكل (2)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



شكل (3)



شكل (4)

تمارين : استخدم طرق تحليلية (جبرية) لإيجاد

(أ) النقاط الحرجة .

(ب) القيم القصوى المحلية أن وجدت .

(ت) القيم القصوى المطلقة أن وجدت .

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & ; -2 \le x \le 0 \\ 2x+1 & ; 0 > x \ge 3 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 7$; $x \in [-3, 4]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $y = \csc x$; $0 < x < \pi$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

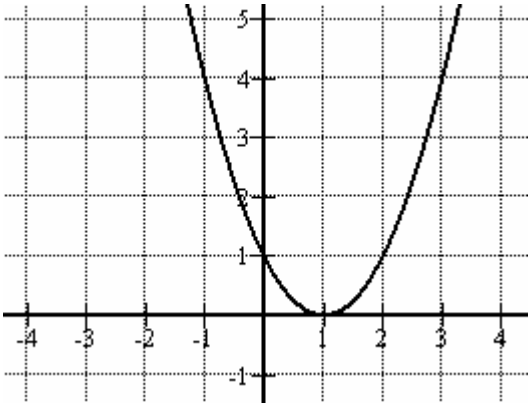
. . . . . .

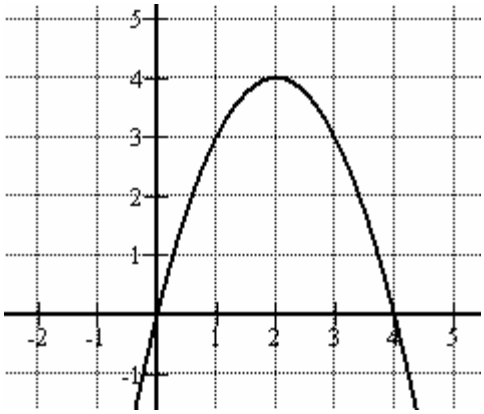
. . . . . .

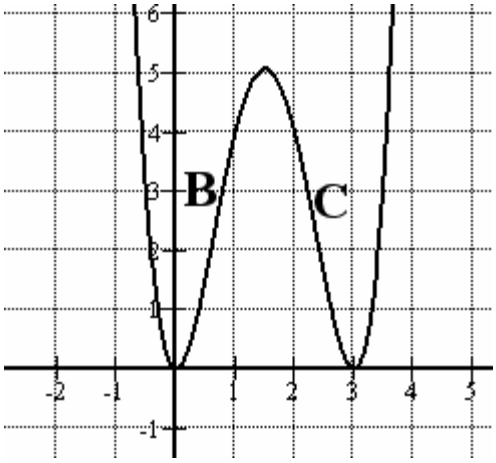
. . . . . .

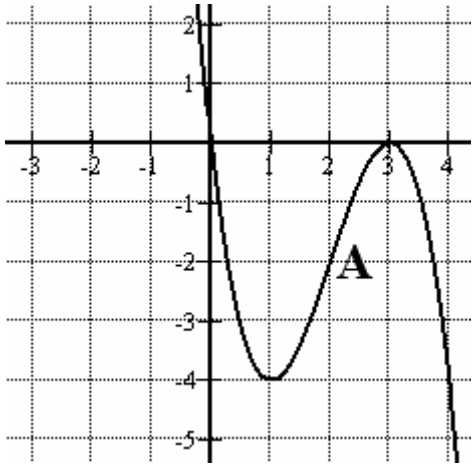
. . . . . .

التقعر









اختبار التقعر

إذا كانت للدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة المفتوحة I فأن منحي الدالة يكون

(أ) مقعر للأعلى إذا كانت $f''(x) > 0$.

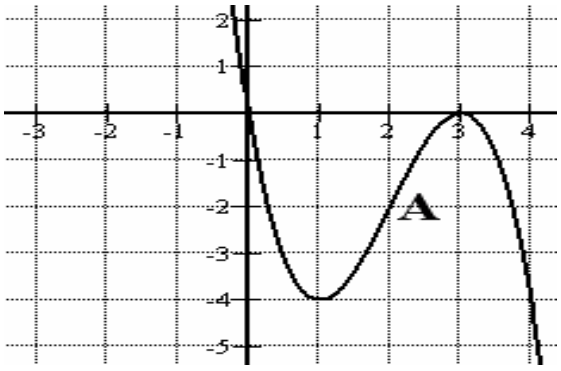
(ب) مقعر للأسفل إذا كانت $f''(x) < 0$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

نقطة الانقلاب (الانعطاف)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المفتوحة I التي تحتوي العدد a و كان منحني الدالة يغير تقعره عند a فأن النقطة $(a\ ,f(a))$ تسمي نقطة انقلاب (انعطاف) للمنحني .

ملاحظة : إذا كانت الدالة $f(x)$ من الدرجة الثالثة ولها قيمة عظمي محلية عند x_1 وقيمة صغري محلية عند x_2 فأن للدالة نقطة انقلاب عند $\frac{x_1+x_2}{2}$



في الشكل المقابل :$f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة لها قيمة صغري محلية عند $x=1$
وقيمة عظمي محلية عند $x=3$
ونقطة انعطاف عند $x=2$

تمارين: استخدم طرق تحليلية (جبرية) لإيجاد

(أ) النقاط الحرجة
(ب) فترات التزايد و التناقص .
(ت) القيم القصوى المحلية.
(ث) فترات التقعر.
(ج) نقاط الانعطاف .

(2) $f(x)=x^3-3x+1$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $f(x) = x^3-3x^2+3x-2$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

(5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

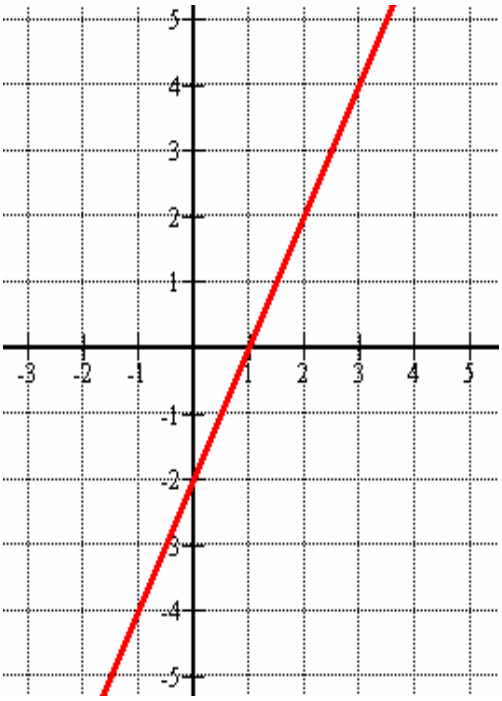
(6) $y = \frac{2}{3}x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 10$

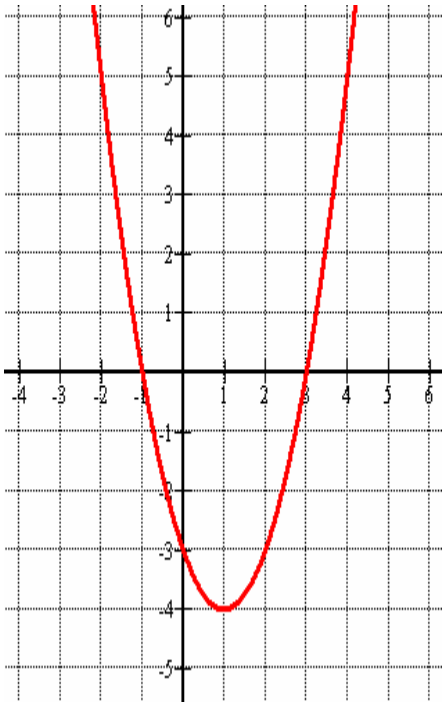
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

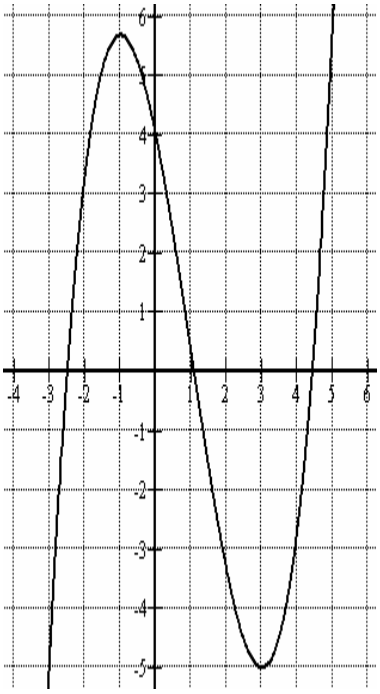
القيم القصوى المحلية والمشتقة الثانية (اختبار المشتقة الثانية)

إذا كانت للدالة $f(x)$ مشتقة ثانية أي $f''(x)$ موجودة وكان للدالة فيمه عظمي محلية عند x_1 وقيمة صغرى محلية عند x_2 فأنه

$f''(x_1) < 0$; $f''(x_2) > 0$







$f''(x)$ $f'(x)$ $f(x)$

للدالة $f(x)$ قيمة عظمي محلية عند $x = -1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 3$

$f'(-1) = 0$; $f''(-1) = -$

$f'(3) = 0$; $f''(3) = +$

ملاحظة : إذا كان

$f'(x_1) = 0$; $f''(x_1) = 0$

يفشل اختبار المشتقة الثانية . ويستخدم اختبار المشتقة الأولي .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

تمارين :-

في التمارين التالية أوجد (أن وجد)

(أ) النقاط الحرجة .

(ب) القيم القصوى المحلية (استخدم اختبار المشتقة الثانية)

(ت) فترات التقعر ونقاط الانعطاف .

(1) $y=(x-1)^2\,(x+1)^2$

(2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

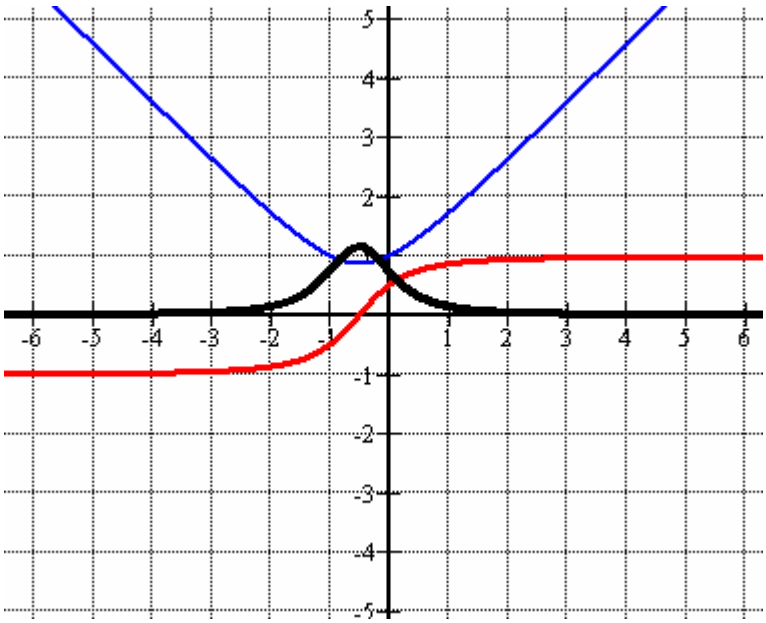
Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(3) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(4)

في الشكل التالي عين : $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ وعين فترات التزايد و التناقص والقيم القصوى المحلية و فترات التقعر ونقاط الانقلاب (أن وجد) .



Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(5)

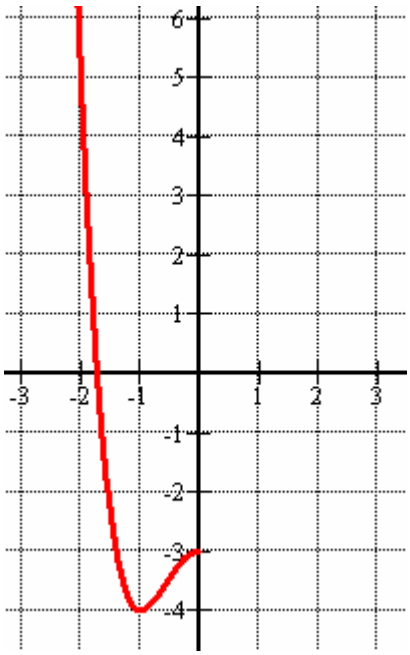
الشكل التالي هو جزء من الرسم البياني لدالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة و هي دالة زوجية –

(أ) أكمل الشكل البياني للدالة $f(x)$.

(ب) عين النقاط الحرجة .

(ت) عين فترات التزايد و التناقص القيم القصوى المحلية.

(ث) عين فترات التقعر ونقاط الانقلاب .



(6)

$f(x)$ دالة نسبية متصلة وقابلة للاشتقاق والجدول التالي يعطي بعض قيم الدالة ومشتقاتها

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.2	4/3	1	0	1/3	0.5	0.6
$f'(x)$	0.06	0	-1	0	1/3	0.1	0.08
$f''(x)$	0.01	-2/9	-2	2	-2/9	-0.1	-0.04

أوجد (أ) النقاط الحرجة .

(ب) فترات التزايد و التناقص والقيم القصوى المحلية .

(ج) فترات التقعر و نقاط الانقلاب .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)