(1) $\lim_{\|P\|-0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, \Delta x_k = \int_0^2 x^2 \, dx$ حيث P هي أي تجزيء للفترة $[0, 2]$.

(2) $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta xk = \int_2^3 \frac{1}{1-x} \, dx$ حيث P هي أي تجزيء للفترة $[2, 3]$.

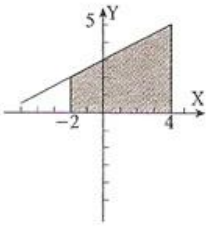
(3) $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k^2} \, \Delta x_k = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx$ حيث P هي أي تجزيء للفترة $[0, 1]$.

(4) $\int_{-2}^{1} 5dx = 5[1-(-2)] = 15$

(5) $\int_3^7 (-20)dx = (-20)(7-3) = -80$

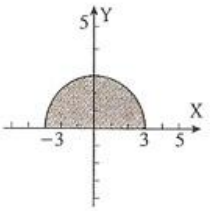
(6) $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{2}[-1-(-4)] = \frac{3\pi}{2}$

(7) ارسم بيانيًّا المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = \frac{x}{2} + 3$ ومحور السينات لـ $-2 \leqslant x \leqslant 4$



$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \frac{1}{2}(6)(2+5) = 21$$

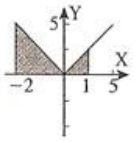
(8) ارسم بيانيًّا المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = \sqrt{9-x^2}$ ومحور السينات لـ $-3 \leqslant x \leqslant 3$



هذه المنطقة هي نصف لدائرة ذات نصف قطر يساوي 3

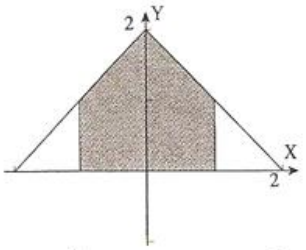
$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$$

(9) ارسم بيانيًّا المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = |x|$ ومحور السينات لـ $-2 \leq x \leq 1$



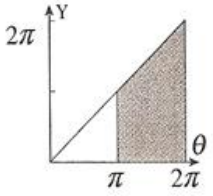
$$\int_{-2}^{1} |x| dx = \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{5}{2}$$

(10) ارسم بيانيًّا المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = 2 - |x|$ ومحور السينات لـ $-1 \le x \le 1$



$$\int_{-1}^{1}(2-|x|)dx = \frac{1}{2}(1)(1+2)+\frac{1}{2}(1)(1+2) = 3$$

(11) ارسم بيانيًّا المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = \theta$ ومحور السينات لـ $\pi \le \theta \le 2\pi$



$$\int_{\pi}^{2\pi}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(2\pi-\pi)(2\pi+\pi) = \frac{3\pi^2}{2}$$

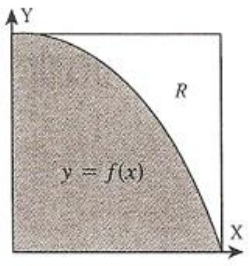
(12) لاحظ أن الرسم البياني لـ $f(x) = x^3$ متناظر مع نقطة الأصل، لهذا المساحة أعلى المحور السيني مساوية للمساحة أسفل هذا المحور لـ $-1 \le x \le 1$

$\int_{-1}^{1} x^3 dx =$ (المساحة أعلى المحور السيني) $-$ (المساحة أسفل للمحور السيني) $= 0$

(13) لاحظ أن المساحة تحت الرسم البياني لـ $f(x) = (x-2)^3$ لـ $2 \le x \le 3$ هي فقط المنطقة تحت الرسم البياني لـ $g(x) = x^3$ لـ $0 \le x \le 1$ مع وحدتين منقولتين إلى اليمين.

$$\int_2^3 (x-2)^3 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

(14) لاحظ من الرسم البياني التالي أن المنطقة تحت الرسم البياني لـ $f(x) = 1 - x^3$ لـ $0 \le x \le 1$ يفصل منطقة R عن المربع المماثل للمنطقة تحت الرسم البياني لـ $g(x) = x^3$ لـ $0 \le x \le 1$



$$\int_0^1 (1-x^3)dx = 1 - \int_0^1 x^3 dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(15) لاحظ أن الرسم البياني لـ $f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^3$ لـ $0\le x\le 2$ هو فقط امتداد أفقي للرسم البياني لـ $g(x)=x^3$ لـ $0\le x\le 1$ مع عامل لـ 2. هكذا، فإن المنطقة تحت $f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^3$ لـ $0\le x\le 2$ هي مرتين المساحة أسفل الرسم البياني لـ $g(x)=x^2$ لـ $0\le x\le 1$.

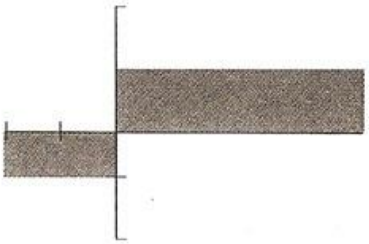
$$\int_0^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 = 2\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2}$$

(16) $\frac{1}{2}[\ln(x^2+4)]_0^5 = \frac{1}{2}[\ln 29 - \ln 4] = 0.9905$

(17) $\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx = -\frac{1}{3}[x^3]_{-2}^{2} + 4[x]_{-2}^{2} = \frac{-16}{3} + 16 = \frac{32}{3} \approx 10.6667$

(18) (أ) للدالة نقاط عدم اتصال عند $x=0$

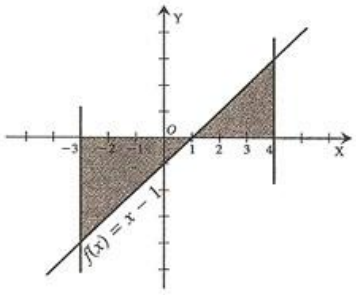
(ب)



$$\int_{-2}^{3}\frac{x}{|x|}dx = -2+3 = 1$$

(19) (أ) للدالة نقاط عدم اتصال عند $x=-1$

(ب)



$$\int_{-3}^{4}\frac{x^2-1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2}(4)(4) + \frac{1}{2}(3)(3) = -\frac{7}{2}$$

(20) (a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx = -2(-1) = 2$

(b) $\int_7^9[f(x)+h(x)]dx = \int_7^9 f(x)dx + \int_7^9 h(x)dx = 5+4 = 9$

(c) $\int_7^9[2f(x)-3h(x)]dx = \int_7^9 2f(x)dx - \int_7^9 3h(x)dx = 2\int_7^9 f(x)dx - 3\int_7^9 h(x)dx$
$= 2(5) - 3(4) = -2$

(d) $\int_9^1 f(x)dx = -\int_1^9 f(x)dx = 1$

(e) $\int_1^7 f(x)dx = \int_1^9 f(x)dx + \int_9^7 f(x)dx = \int_1^9 f(x)dx - \int_7^9 f(x)dx = -1-5 = -6$

(f) $\int_9^7[h(x)-f(x)]dx = \int_9^7 h(x)dx - \int_9^7 f(x)dx = -\int_7^9 h(x)dx + \int_7^9 f(x)dx = -4+5 = 1$

(21) (a) $\int_1^2 f(u)du = 5$

(b) $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)dz = \sqrt{3}\int_1^2 f(z)dz = 5\sqrt{3}$

(c) $\int_2^1 f(t)dt = -\int_1^2 f(t)dt = -5$

(d) $\int_1^2 [-f(x)]dx = -\int_1^2 f(x)dx = -5$

(22) (a) $\int_0^{-3} g(t)dt = -\int_{-3}^0 g(t)dt = -\sqrt{2}$

(b) $\int_{-3}^0 \sqrt{3}\, g(u)du = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

(c) $\int_{-3}^0 [-g(x)]dx = -\int_{-3}^0 g(x)dx = -\sqrt{2}$

(d) $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\, dr = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-3}^0 g(r)dr = 1$

(23) (a) $\int_3^4 f(z)dz = \int_3^0 f(z)dz + \int_0^4 f(z)dz = -\int_0^3 f(t)dt + \int_0^3 ft(dt) = -3 + 7 = 4$

(b) $\int_4^3 f(t)dt = \int_4^0 f(t)dt + \int_0^3 f(t)dt = -\int_0^4 f(t)dt + \int_0^3 f(t)dt = -7 + 3 = -4$

(24) (a) $\int_1^3 h(r)dr = \int_1^{-1} h(r)dr + \int_{-1}^3 h(r)dr = -\int_{-1}^1 h(r)dr + \int_{-1}^3 h(r)dr = 6$

(b) $-\int_3^1 h(u)du = -\int_3^{-1} h(u)du - \int_{-1}^1 h(u)du = -\int_{-1}^3 h(u)du - \int_{-1}^1 h(u)du = 6$

(25) المشتقة العكسية لـ 7 هي $F(x) = 7x$

$$\int_3^1 7dx = F(1) - F(3) = 7 - 21 = -14$$

(26) المشتقة العكسية لـ $\frac{x}{8}$ هي $F(x) = \frac{x^2}{16}$

$$\int_3^5 \frac{x}{8}\, dx = F(5) - F(3) = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

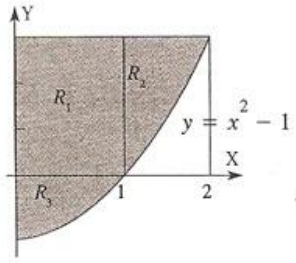
(27) المشتقة العكسية لـ $t - \sqrt{2}$ هي $F(t) = \frac{1}{2}t^2 - \sqrt{2}\, t$

$$\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2})dt = F(\sqrt{2}) - F(0) = -1 - 0 = -1$$

(28) المشتقة العكسية لـ e^x هي $F(x) = e^x$

$$\int_0^2 e^x\, dx = F(2) - F(0) = e^2 - 1 \approx 6.389$$

(29) قسّم المنطقة المظللة كما يلي:



لاحظ أن المشتقة العكسية لـ x^2-1 هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

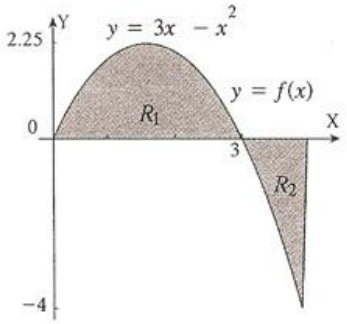
مساحة R_1: $3(1) = 3$

مساحة R_2: $3(1) - \int_1^2 (x^2-1)dx = 3 - [F(2) - F(1)] = 3 - \left[\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{5}{3}$

مساحة R_3: $-\int_0^1 (x^2-1)dx = -[F(1) - F(0)] = -\left[\left(-\frac{2}{3}\right) - 0\right] = \frac{2}{3}$

مجموع المساحات المظللة هو: $3 + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

(30) قسّم المنطقة المظللة كما يلي:



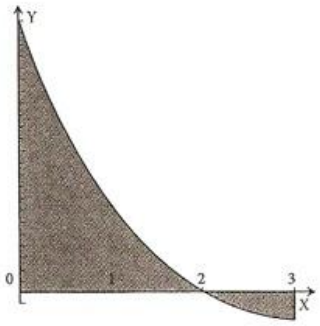
لاحظ أن المشتقة العكسية لـ $3x-x^2$ هي $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

منطقة R_1: $\int_0^3 (3x - x^2)dx = F(3) - F(0) = \frac{9}{2}$

منطقة R_2: $\int_3^4 (3x - x^2)dx = F(4) - F(3) = -\frac{11}{6}$

المساحة المظللة: $\frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$

(31) المشتقة العكسية لـ $x^2 - 6x + 8$ هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

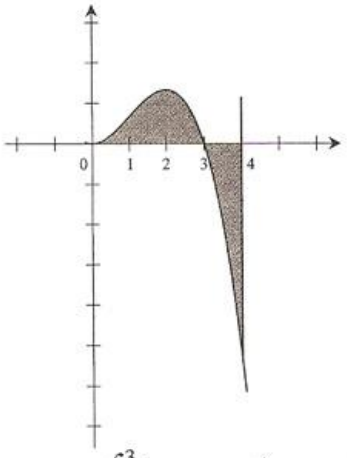


(أ) $\int_0^3 (x^2 - 6x + 8)dx = F(3) - F(0) = 6 - 0 = 6$

(ب) $\int_0^2 (x^2 - 6x + 8)dx - \int_2^3 (x^2 - 6x + 8)dx = [F(2) - F(0)] - [F(3) - F(2)]$

$= \left(\frac{20}{3} - 0\right) - \left(6 - \frac{20}{3}\right) = \frac{22}{3}$

(32) المشتقة العكسية لـ $2x-x^2$ هي $F(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$



(أ) $\int_0^3 (2x - x^2)dx = F(3) - F(0) = 0 - 0 = 0$

(ب) المساحة $\int_0^2 (2x - x^2)dx - \int_2^3 (2x - x^2)dx = [F(2) - F(0)] - [F(3) - F(2)]$

$$= \left(\frac{4}{3} - 0\right) - \left(0 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

(33) المشتقة العكسية لـ x^2-1 هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$$av = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 1)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}[F(\sqrt{3}) - F(0)] = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 - 0) = 0$$

أوجد $x = c$ على الفترة $[0, \sqrt{3}]$ بحيث $c^2 - 1 = 0$

$$c^2 = 1$$

$$c = 1$$

حيث إن 1 تنتمي إلى الفترة $[0, \sqrt{3}]$، $x = 1$

(34) المشتقة العكسية لـ $-3x^2 - 1$ هي $F(x) = -x^3 - x$

$$av = \frac{1}{1}\int_0^1 (-3x^2 - 1)dx = F(1) - F(0) = -2$$

$$-3c^2 = -1$$

$$c^2 = \frac{1}{3}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

حيث إن $\frac{1}{\sqrt{3}}$ تنتمي إلى الفترة $[0, 1]$، $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(35) المنطقة بين الرسم البياني والمحور السيني هي مثلث ذات ارتفاع (3) وقاعدة (6).

إذًا، مساحة المنطقة هي $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$

$$av(f) = \frac{1}{6}\int_{-4}^{2} f(x)dx = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(36) هناك مساحات متساوية فوق المحور السيني وعند أسفله ومجاورة للمحور السيني

$$av(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \times 0 = 0$$

(37) القيمة العظمى لـ $\sin(x^2)$ هي $\sin(1)$ على الفترة $[0,1]$

إذًا: $\int_0^1 \sin(x^2)dx \leq \sin(1) < 1$

(38) الوقت المستغرق في المرحلة الأولى: $\frac{1000}{10} = 100 \text{ min}$

الوقت المستغرق في المرحلة الثانية: $\frac{1000}{20} = 50 \text{ min}$

المعدل: $\frac{\text{مجموع الكميات}}{\text{مجموع الأوقات}} = \frac{2000}{150} = 13\frac{1}{3} \text{ m}^3/\text{min}$

(39) $\int_0^1 \sin x dx \leq \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$