(1) $\int_{1/2}^{3}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=[2x-\ln|x|]_{1/2}^{3}=(6-\ln 3)-\left(1-\ln\frac{1}{2}\right)=5-\ln 3+\ln\frac{1}{2}$

$=5-\ln 3-\ln 2=5-\ln 6\approx 3.208$

(2) $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-(0+0)=1$

(3) $\int_{1}^{32}x^{-6/5}dx=[-5x^{-1/5}]_{1}^{32}=-5\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$

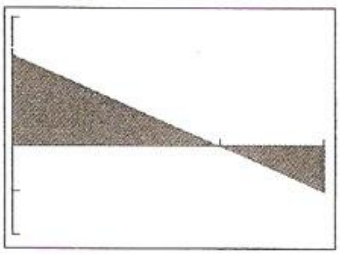
(4) $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_{0}^{\pi}=1-(-1)=2$

(5) $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2\theta\,d\theta=2[\tan\theta]_{0}^{\pi/3}=2(\sqrt{3}-0)=2\sqrt{3}\approx 3.464$

(6) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc x\cot x\,dx=[-\csc x]_{\pi/4}^{3\pi/4}=(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})=0$

(7) $\int_{-1}^{1}(r+1)^2\,dr=\left[\frac{1}{3}(r+1)^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}$

(8) الرسم البياني لـ $y=2-x$

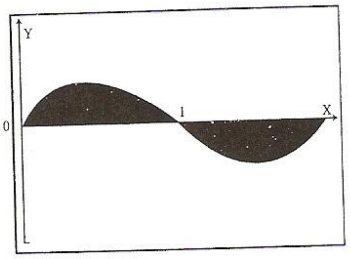


على الفترة $[0, 2]$: $\int_{0}^{2}(2-x)dx=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}=2$

على الفترة $[2, 3]$: $\int_{2}^{3}(2-x)dx=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{3}=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

مجموع المساحات $=|2|+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$

(9) الرسم البياني لـ $y = x^3 - 3x^2 + 2x$



على الفترة $[0, 1]$: $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

على الفترة $[1, 2]$: $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

مجموع المساحات $\left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$

(10) (أ) لا، الدالة: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ غير متصلة عند $x = -1$

(ب) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$، $x \neq -1$

تكون المساحة بين الرسم البياني لـ f والمحور السيني على الفترة $[-2, 1)$ حيث f سالبة، $\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$

وتكون المساحة بين الرسم البياني لـ f والمحور السيني على الفترة $[1, 3)$ حيث f موجبة، $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$

$$\int_{-2}^{3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}dx = -\frac{9}{2} + 2 = -\frac{5}{2}$$

(11) (أ) لا، $f(x) = \frac{9 - x^2}{3x - 9}$ هي دالة غير متصلة عند $x = 3$

(ب) $\frac{9 - x^2}{3x - 9} = -\frac{3 + x}{3}$، $x \neq 3$

لاحظ أن f سالبة لـ x في $[0, 5]$. $f(0) = -1$ و $f(5) = -\frac{8}{3}$

تكون المساحة بين الرسم البياني لـ f والمحور السيني على الفترة $[0, 5]$، $\frac{1}{2}(5 - 0)\left(1 + \frac{8}{3}\right) = \frac{55}{6}$

$$\int_0^5 \frac{9 - x^2}{3x - 9}dx = -\frac{55}{6}$$

(12) أولًا، أوجد المساحة تحت الرسم البياني لـ $y = x^2$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ثم، أوجد المساحة تحت الرسم البياني لـ $y = 2 - x$

$$\int_1^2 (2 - x)dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

مجموع المساحات المظللة هو: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

(13) أولًا، أوجد المساحة تحت الرسم البياني لـ $y = \sqrt{x}$

$$\int_0^1 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

ثم، أوجد المساحة تحت الرسم البياني لـ $y = x^2$

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

مجموع المساحات المظللة هو: $\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$

(14) أولًا، أوجد المساحة تحت الرسم البياني لـ $y = 1 + \cos x$

$$\int_0^{\pi}(1 + \cos x)dx = [x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$$

مساحة المستطيل هي 2π

مجموع المساحات المظللة هو: $2\pi - \pi = \pi$

(15) أولًا، أوجد مساحة المنطقة بين $y = \sin x$ والمحور السيني $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

مساحة المستطيل هي $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

مساحة المنطقة المظللة هي: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(16) $\int_a^x f(t)dt + K = \int_b^x f(t)dt$

$$K = -\int_a^x f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = \int_b^a f(t)dt$$

$$K = \int_2^{-1}(t^2 - 3t + 1)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t\right]_2^{-1} = \left[-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + (-1)\right] - \left[\frac{8}{3} - 6 + 2\right] = -\frac{3}{2}$$

(17) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}$

(18) $\frac{dy}{dx} = \sin\left[(\sqrt{x})^2\right]\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = (\sin x)x\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

(19) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3}\cos(2t)dt - \int_0^{x^2}\cos(2t)dt\right) = \cos(2x^3)3x^2 - \cos(2x^2)2x$

$= 3x^2\cos(2x^3) - 2x\cos(2x^2)$

(20) اختر **(d)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{\pi}^{x} e^{-t^2}dt - 3\right) = e^{-x^2}$$

$$y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} e^{-t^2}dt - 3 = 0 - 3 = -3$$

(21) اختر **(c)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^{x} \sec t\, dt + 4\right) = \sec x$$
$$y(-1) = \int_{-1}^{-1} \sec t\, dt + 4 = 0 + 4 = 4$$

(22) اختر **(b)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} \sec t\, dt + 4\right) = \sec x$$
$$y(0) = \int_{0}^{0} \sec t\, dt + 4 = 0 + 4 = 4$$

(23) اختر **(a)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{1}^{x} e^{-t^2} dt - 3\right) = e^{-x^2}$$
$$y(1) = \int_{1}^{1} e^{-t^2} dt - 3 = 0 - 3 = -3$$

(24) $x = a$ حيث: $\int_a^a f(t)dt = 0$

(25) $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$

(26) $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}(x\cos \pi x) = x(-\pi \sin \pi x) + 1\cos \pi x = -\pi x \sin \pi x + \cos \pi x$

$f(4) = -4\pi \sin 4\pi + \cos 4\pi = 1$

(27) (أ) $H(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

(ب) $H'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = f(x)$

$H'(x) > 0$ عندما $f(x) > 0$

H تتزايد على الفترة $[0, 6]$

(جـ) H مقعرة لأعلى على الفترة المفتوحة حيث $H''(x) = f'(x) > 0$

$f'(x) > 0$ عندما $9 < x \leq 12$

H مقعرة لأعلى في الفترة $(9, 12)$

(د) $H(12) = \int_0^{12} f(t)dt > 0$ لأنه هناك مساحات فوق المحور السيني أكثر من تلك أسفل المحور السيني، $H(12)$ موجبة.

(هـ) $H'(x) = f(x) = 0$ عند $x = 6$ و $x = 12$ وحيث أن $H'(x) = f(x) > 0$ على الفترة $[0,6]$ فإن قيم H تتزايد على يسار $x = 6$ و $H'(x) = f(x) < 0$ على الفترة $(6,12]$ فإن قيم H تتناقص على يمين $x = 6$ وتحصل القيمة العظمى لـ H عند $x = 6$

(و) $H(x) > 0$ على الفترة $(0,12]$ حيث $H(0) = 0$ تحصل القيمة الصغرى لـ H عند $x = 0$

(28) (أ) $S'(t) = f(t)$. السرعة المتجهة عند $t = 5$، إذًا $f(5) = 2$ units/ sec

(ب) $S''(t) = f'(t) < 0$ عند $t = 5$ حيث إن المنحنى يتناقص، إذًا سرعة الجسيم عند $t = 5$ سالبة.

(جـ) $s(3) = \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$ units

(د) لـ S قيمتها الكبرى عند $t = 6$ sec، حيث إن $S'(6) = f(6) = 0$ و $S''(6) = f'(6) < 0$

(هـ) عجلة الجسيم هي صفر عندما $S''(t) = f'(t) = 0$. يحدث ذلك عندما $t = 4$ sec و $t = 7$ sec

(و) حيث إن $s(0) = 0$ و $S'(t) = f(t) > 0$ على $(0, 6)$، حيث يتحرك الجسيم بعيدًا عن نقطة الأصل في الاتجاه الموجب، على الفترة $(0,6)$، ثم يتحرك في الاتجاه السالب باتجاه نقطة الأصل على الفترة $(6,9)$ حيث إن: $S'(t) = f(t) < 0$ على الفترة $(6,9)$ والمساحة تحت محور السينات أصغر من المساحة فوق محور السينات.

(ز) الجسيم في الجهة الموجبة حيث إن $S(9) = \int_0^9 f(x)dx > 0$ (المساحة أسفل المحور السيني أصغر من المساحة فوق المحور السيني).