* إجابات المجموعة A

(1) القيمة العظمى عند $x = b$ والقيمة الصغرى عند $x = c_2$
تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على $[a, b]$ إذًا، كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.

(2) ما من قيمة عظمى أو صغرى لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة أو معرفة على فترة مغلقة.

(3) قيمة عظمى عند $x = c$ وقيمة صغرى عند $x = a$ لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(4) قيمة عظمى عند $x = a$ والقيمة الصغرى عند $x = c$ لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(5) القيمة العظمى عند $(0, 5)$ لاحظ أنه ما من قيمة صغرى حيث إنّ النقطة المتطرفة $(2, 0)$ لا تنتمي إلى الرسم البياني.

(6) قيمة عظمى محلية عند $(-3, 0)$ قيمة صغرى محلية عند $(2, 0)$. وقيمة عظمى عند $(1, 2)$ وقيمة صغرى محلية عند $(0, -1)$.

(7) للمشتقة الأولى $f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ أصفار عند و $x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$.

قيم الدالة عند النقاط الحرجة:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -1$$

قيم الدالة عند النقاط الطرفية:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$$

قيمة عظمى 1 عند $x = \frac{\pi}{4}$

قيمة صغرى -1 عند $x = \frac{5\pi}{4}$

قيمة صغرى محلية عند $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

(8) لا تكون المشتقة الأولى $f'(x) = \frac{3}{5}x^{-2/5}$ أبدًا صفرًا لكنها غير معرفة عند $x = 0$.

قيمة الدالة عند النقطة الحرجة: $x = 0$ $f(x) = 0$.

قيمة الدالة عند النقطة الطرفية: $x = 3$ $f(x) = 3^{3/5} \approx 1.933$.

حيث $f(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $f(x) > 0$ لكل $x > 0$.

فإنه لا توجد عند النقطة الحرجة قيمة محلية صغرى أو قيمة محلية عظمى. القيمة العظمى هي $3^{3/5}$ عند $x = 3$.

(9) المشتقة $y' = 4x - 8$. القيمة الصغرى 1 عند $x = 2$.

(10) لإيجاد القيم القصوى، لاحظ أن $y' = 3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2)$ وتكون $y' = 0$ عندما تكو
$x = -2$ أو $x = \frac{4}{3}$. توجد قيمة محلية عظمى عند $(-2, 17)$ وقيمة محلية صغرى عند $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$.

(11) المشتقة $y' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$. القيمة الصغرى 1 عند $x = 0$.

(12) المشتقة $y' = \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. قيمة عظمى 2 عند $x = 1$. قيمة صغرى هي 0 عند $x = -1$ وعند $x = 3$.

(13) المشتقة $y' = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. قيمة عظمى $\dfrac{1}{2}$ عند $x = 1$. قيمة صغرى $\dfrac{-1}{2}$ عند $x = -1$.

(14) $y' = x^{2/3}(1) + \dfrac{2}{3}x^{-1/3}(x+2) = \dfrac{5x+4}{3\sqrt[3]{x}}$

القيمة	قيمة قصوى	المشتقة	النقاط الحرجة والطرفية
$\frac{12}{25}10^{1/3} \approx 1.034$	قيمة محلية عظمى	0	$x = -\frac{4}{5}$
0	قيمة محلية صغرى	غير معرفة	$x = 0$

(15) $y = x^2 \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1) + 2x\sqrt{3-x} = \dfrac{-x^2+4x(3-x)}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{-5x^2+12x}{2\sqrt{3-x}}$

القيمة	قيمة قصوى	المشتقة	النقاط الحرجة والطرفية
0	قيمة محلية صغرى	0	$x = 0$
$\frac{144}{125}15^{1/2} \approx 4.462$	قيمة محلية عظمى	0	$x = \frac{12}{5}$
0	قيمة محلية صغرى	غير معرفة	$x = 3$

(16) $y' = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 2-2x, & x > 0 \end{cases}$ ولتحديد ما إذا كانت المشتقة موجودة عند $x = 0$. نحسب المشتقة من جهة اليمين $\lim_{h \to 0^+} = \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 2$ والمشتقة من جهة اليسار $\lim_{h \to 0^-} = \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$ فنجد أنهما غير متساويتين فتكون $f(0)$ غير موجودة.

القيمة	قيمة قصوى	المشتقة	النقاط الحرجة والطرفية
3	قيمة محلية صغرى	غير موجودة	$x = 0$
4	قيمة محلية عظمى	0	$x = 1$

(17) الرسم البياني (c)، حيث إنه الرسم البياني الوحيد الذي يحتوي على ميل موجب عند c.

(18) الرسم البياني (b)، حيث إنه الرسم البياني الوحيد الذي يظهر دالة قابلة للاشتقاق عند a وb ولها ميل سالب عند c.

(19) الرسم البياني (d)، حيث إنه الرسم البياني الوحيد الذي يظهر دالة قابلة للاشتقاق عند b وليس عند a.

(20) الرسم البياني (a)، حيث إنه الرسم البياني الوحيد الذي يظهر أن الدالة غير مشتقة عند a أو b.

(21) (أ) $p'(x) = 2 - 200x^{-2}$. النقطة الحرجة الوحيدة التي تنتمي إلى المجال $(0, \infty)$ هي عند $x = 10$. القيمة الصغرى لـ $p(x)$ هي 40 عند $x = 10$.

(ب) المحيط الأصغر الممكن للمستطيل هو 40 units ويحدث ذلك عند $x = 10$ مما يجعل المستطيل مربعًا يساوي 10×10.

*** إجابات المجموعة B**

(1) القيمة العظمى عند $x = c$ والقيمة الصغرى عند $x = b$، تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على $[a, b]$ إذًا، كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.

(2) القيمة العظمى عند $x = c$، ما من قيمة صغرى لا تطبق نظرية القيمة القصوى، لأن الدالة غير معرفة على فترة مغلقة.

(3) القيمة الصغرى المحلية عند $(-1, 0)$، القيمة العظمى المحلية عند $(1, 0)$.

(4) القيمة الصغرى عند $(-2, 0)$ و$(2, 0)$ والقيمة العظمى عند $(0, 2)$.

(5) للمشتقة الأولى $g'(x) = \sec x \tan x$ أصفار عند $x = 0$ و $x = \pi$ إنما غير معرفة أيضًا، عند $x = \frac{\pi}{2}$ حيث $g(x) = \sec x$ أيضًا غير معرفة عند $x = \frac{\pi}{2}$، تحدث النقاط الحرجة فقط عند $x = 0$ و $x = \pi$.

قيم النقاط الحرجة، $g(x) = 1$ ،$x = 0$.

$g(x) = -1$ ،$x = \pi$

حيث مدى $g(x)$ هو $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$، يجب أن تكون لهذه القيم قيمة محلية صغرى عند $(0, 1)$ وقيمة محلية عظمى عند $(\pi, -1)$.

(6) $f'(x)$ ،$f'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ لا تساوي صفرًا، ولكنها غير موجودة عند $x = 0$ فتكون النقطة الحرجة $x = 0$، عند $x = 0$ تكون $f(0) = 0$.

عند النقطة الطرفية $x = -3$ تكون $f(-3) = (-3)^{\frac{2}{5}}$

وحيث أن $f'(x) > 0$ لكل $x > 0$

$f'(x) < 0$ لكل $x < 0$، فإنه توجد للدالة قيمة عظمى عند $x = -3$ هي $(-3)^{\frac{2}{5}}$ وقيمة صغرى عند $x = 0$ هي 0.

(7) لإيجاد القيم القصوى، لاحظ أن $y' = 3x^2 - 2$، التي تساوي 0 عند $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ توجد قيمة محلية عظمى عند $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \approx (0.816, 2.911)$، وقيمة محلية صغرى عند $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \approx (-0.816, 5.089)$.

(8) لاحظ أن $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$ التي تكون صفرًا عند $x = 1$ المشتقة موجبة على كل من يمين $x = 1$ ويسارها إذًا ليس للدالة قيم قصوى محلية أو مطلقة.

(9) المشتقة $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$، القيمة الصغرى 0 عند $x = -1$ و $x = 1$.

(10) للتأكيد على أنه ما من وجود لقيمة قصوى لاحظ أن $y' = -(x^2 - 1)^{-2}(2x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$ والتي تساوي صفرًا فقط عند $x = 0$ والمشتقة غير معرفة فقط حيث y غير معرفة يوجد قيمة عظمى محلية عند $(0, -1)$.

(11) المشتقة $y' = 6x^3 + 12x^2 - 18x = 6x(x - 1)(x + 3)$، قيمة صغرى $-\frac{115}{2}$ عند $x = -3$ وقيمة عظمى محلية عند $(0, 10)$ والقيمة صغرى عند $\left(1, \frac{13}{2}\right)$.

(12) المشتقة $\frac{-x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$، قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x = 0$ وقيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x = -2$

(13) $y' = x^{2/3}(2x) + \frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2-4) = \frac{8x^2-8}{3\sqrt[3]{x}}$

النقاط الحرجة والطرفية	المشتقة	قيمة قصوى	القيمة
$x=-1$	0	قيمة محلية صغرى	-3
$x=0$	غير موجودة	قيمة محلية عظمى	0
$x=1$	0	قيمة محلية صغرى	-3

(14) $y' = x\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x) + (1)\sqrt{4-x^2} = \frac{-x^2+(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

النقاط الحرجة والطرفية	المشتقة	قيمة قصوى	القيمة
$x=-2$	غير موجودة	قيمة محلية عظمى	0
$x=-\sqrt{2}$	0	قيمة محلية صغرى	-2
$x=\sqrt{2}$	0	قيمة محلية عظمى	2
$x=2$	غير موجودة	قيمة محلية صغرى	0

(15) $y' = \begin{cases} -2, & x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ ولتحديد ما إذا كانت المشتقة موجودة عند $x=1$ نحسب المشتقة من جهة اليمين والمشتقة من جهة اليسار فنجد أنهما غير متساويتين -2

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{4-2(1+h)-2}{h} = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1+h+1-2}{h} = 1$$

النقاط الحرجة والطرفية	المشتقة	قيمة قصوى	القيمة
$x=1$	غير موجودة	قيمة محلية صغرى	2

(16) $y' = \begin{cases} -2, & x<1 \\ -2x+6, & x>1 \end{cases}$ ولتحديد ما إذا كانت المشتقة موجودة عند $x=1$ نحسب المشتقة من جهة اليمين والمشتقة من جهة اليسار فنجد أنهما غير متساويتين -4

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)^2-2(1+h)+4-1}{h} = -4$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)^2+6(1+h)-4-1}{h} = +4$$

النقاط الحرجة	المشتقة	قيمة قصوى	القيمة
$x=-1$	0	قيمة محلية عظمى	5
$x=1$	غير موجودة	قيمة محلية صغرى	1
$x=3$	0	قيمة محلية عظمى	5