(17) نبدأ بتحديد ما إذا كانت $f'(x)$ موجودة عند $x = 1$. حيث،

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$$

المشتقة لجهة اليسار،

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{1}{4}(1+h)^2 - \frac{1}{2}(1+h) + \frac{15}{4} - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 4h}{4h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{4}(-h - 4) = -1$$

المشتقة لجهة اليمين،

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^3 - 6(1+h)^2 + 8(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h3 - 3h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} (h^2 - 3h - 1) = -1$$

وحيث إن المشتقتين من جهة اليمين ومن جهة اليسار متساويتان فإن المشتقة عند $x = 1$ موجودة.

لذلك $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 8, & x > 1 \end{cases}$. لاحظ أن $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ عندما $x = -1$ و $3x^2 - 12x + 8 = 0$ عندما $x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ لكن، $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0.845 < 1$ إذًا، النقاط الحرجة تحدث فقط عند $x = -1$ و $x = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 3.155$.

القيمة	قيمة قصوى	المشتقة	النقاط الحرجة
4	قيمة محلية عظمى	0	$x = -1$
≈ -3.079	قيمة محلية عظمى	0	$x \approx 3.155$

(18) (أ)

$$v(x) = 160x - 52x^2 + 4x^3$$

$$v'(x) = 160 - 104x + 12x^2 = 4(x-2)(3x-20)$$

النقطة الحرجة الوحيدة في الفترة $(0, 5)$ عند $x = 2$ القيمة العظمى لـ $v(x)$ هي 144 عند $x=2$.

(ب) الحجم الأكبر المحتمل للصندوق هو 144. يحدث ذلك عند $x = 2$.

(1) (أ) $f'(x) = 5 - 2x$، حيث $f'(x) > 0$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$، $f'(x) = 0$ عند $x = \frac{5}{2}$ و $f'(x) < 0$ على الفترة $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$، نعلم أن لـ $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ حيث $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$. تحدث القيمة المحلية العظمى عند النقطة $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ هذه أيضًا قيمة عظمى.

(ب) حيث إن $f'(x) > 0$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$، تتزايد $f(x)$ على الفترة $\left[-\infty, \frac{5}{2}\right)$.

(جـ) حيث إن $f'(x) < 0$ على الفترة $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$، تتناقص $f(x)$ على الفترة $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$.

(2) (أ) $k'(x) = -\frac{2}{x^3}$، حيث لا تكون $k'(x)$ أبدًا صفرًا، وهي غير معرفة فقط حيث $k(x)$ هي غير معرفة ما من نقاط حرجة المجال $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ليس له نقاط طرفية. بالإضافة، ليس لـ $k(x)$ قيم قصوى محلية.

(ب) حيث إن $k'(x) > 0$ على الفترة $(-\infty, 0)$ تتزايد $k(x)$ على الفترة $(-\infty, 0)$.

(جـ) حيث إن $k'(x) < 0$ على الفترة $(0, \infty)$ تتناقص $k(x)$ على الفترة $(0, \infty)$.

(3) (أ) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$، على مجال الدالة $[-2, \infty)$. y' لا تساوي أبدًا صفرًا وهي غير موجودة، فقط عند النقطة الطرفية $x = -2$ للدالة y قيمة محلية عظمى عند $(-2, 4)$ هذه أيضًا قيمة عظمى.

(ب) y' لا تكون أبدًا موجبة. لا تتزايد y أبدًا على أي فترة.

(جـ) y' سالبة على الفترة $(-2, \infty)$ تتناقص y على الفترة $[-2, \infty)$.

(4) (أ) $h'(x) = \frac{(x^2+4)(-1)-(-x)(2x)}{(x^2+4^2)} = \frac{x^2-4}{(x^2+4)^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$. تحدث القيمة المحلية القصوى عند النقاط الحرجة، $x = \pm 2$ هناك قيمة محلية عظمى عند $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ وقيمة محلية صغرى (مطلقة) عند $\left(2, -\frac{1}{4}\right)$

(ب) حيث $h'(x) > 0$ على الفترات $(-\infty, -2)$ و $(2, \infty)$. تتزايد $h(x)$ على الفترات $[-\infty, -2)$ و $[2, \infty)$

(جـ) حيث $h'(x) < 0$ على الفترة $(-2, 2)$. تتناقص $h(x)$ على الفترة $[-2, 2]$.

(5) $g'(x) = 2 - \sin x$

(أ) حيث $1 \le g'(x) \le 3$ لكل قيم x. ما من نقاط حرجة. وبما أنه ليس هناك نقاط حرجة وليس للمجال نقاط متطرفة، ما من قيم قصوى محلية.

(ب) حيث إن $g'(x) > 0$ لكل قيم x. تتزايد $g(x)$ على الفترة $(-\infty, \infty)$.

(جـ) حيث إن $g'(x)$ لا تكون أبدًا سالبة. لا تتناقص $g(x)$ على أي فترة.

(6) (أ) f متصلة على الفترة $[0, 1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 1)$.

(ب)
$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$
$$2c + 2 = \frac{2 - (-1)}{1}$$
$$2c = 1$$
$$c = \frac{1}{2}$$

(7) (أ) يمر الخط القاطع عبر $(0.5, f(0.5)) = (0.5, 2.5)$ و$(2, f(2)) = (2, 2.5)$ إذًا معادلته هي $y = 2.5$.

(ب) ميل الخط القاطع هو 0. إذًا نحتاج إلى إيجاد c عندما $f'(c) = 0$.

$$1 - c^{-2} = 0$$
$$c^{-2} = 1$$
$$c = 1$$
$$f(c) = f(1) = 2$$

ميل خط المماس هو 0 ويمر عبر $(1, 2)$ إذًا معادلته هي $y = 2$.

(8) (أ) يمر الخط القاطع عبر $(1, f(1)) = (1, 0)$ و $(3, f(3)) = (3, \sqrt{2})$. إذًا ميل الخط القاطع هو $\frac{\sqrt{2} - 0}{3 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ والمعادلة هي: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + 0$ أو $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

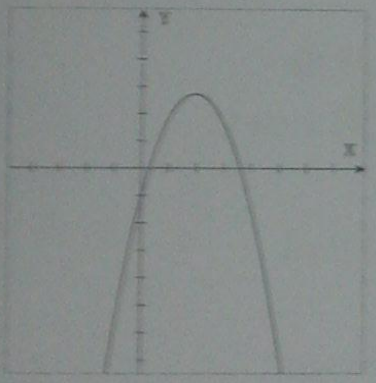
(ب) نحتاج إلى إيجاد c عندما $f'(c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$2\sqrt{c-1} = \sqrt{2}$$
$$c - 1 = \frac{1}{2}$$
$$c = \frac{3}{2}$$
$$f(c) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

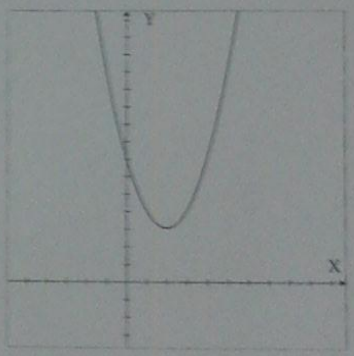
ميل خط المماس $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ويمر عبر $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. معادلته هي: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(9) إجابات ممكنة:

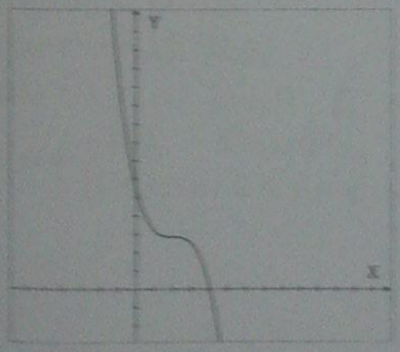
(a)



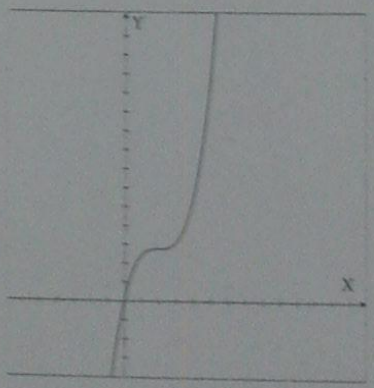
(b)



(c)



(d)



* إجابات المجموعة B

(1) (أ) $g'(x) = 2x - 1$. حيث إن $g'(x) < 0$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. $g'(x) = 0$ عند $x = \frac{1}{2}$ و $g'(x) > 0$ على الفترة $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. نعلم أن لـ $g(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$، حيث إن $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{49}{4}$، تحدث القيمة الصغرى المحلية عند النقطة $\left(\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$ هذه أيضًا قيمة صغرى شاملة.

(ب) حيث $g'(x) > 0$ على الفترة $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. تتزايد $g(x)$ على الفترة $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(جـ) حيث $g'(x) < 0$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. تتناقص $g(x)$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) (أ) $h'(x) = -\frac{2}{x^2}$. حيث لا تكون $h'(x)$ أبدًا صفر. وهي غير معرفة فقط عندما تكون $h(x)$ غير معرفة، ما من نقاط حرجة. وما من نقاط طرفية على المجال $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. بالتالي، ما من قيم قصوى محلية.

(ب) حيث إن $h'(x)$ لا تكون أبدًا موجبة، لذا $h(x)$ لا تتزايد في أي فترة.

(جـ) حيث إن $h'(x) < 0$ في $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ تتناقص $h(x)$ على الفترة $(-\infty, 0)$ وعلى الفترة $(0, \infty)$.

(3) (أ) $y' = 4x^3 - 20x = 4x(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$. للدالة نقاط حرجة عند $x = -\sqrt{5}$، $x = 0$، $x = \sqrt{5}$، حيث $y' < 0$ على الفترات $(-\infty, -\sqrt{5})$ و $(0, \sqrt{5})$ و $y' > 0$ على الفترات $(-\sqrt{5}, 0)$ و$(\sqrt{5}, \infty)$، قيم الدالة عند $x = \pm\sqrt{5}$ هي قيم صغرى محلية والقيمة عند $x = 0$ هي قيمة عظمى محلية. لذلك، للدالة قيمة عظمى محلية عند $(0, 9)$ قيمة صغرى محلية عند $(-\sqrt{5}, -16)$ و$(\sqrt{5}, -16)$ (هذه أيضًا قيم صغرى).

(ب) حيث إن $y' > 0$ على الفترات $(-\sqrt{5}, 0)$ و $(\sqrt{5}, \infty)$، تتزايد y على الفترات $[-\sqrt{5}, \infty)$ و $[\sqrt{5}, \infty)$.

(جـ) حيث إن $y' < 0$ على الفترات $(-\infty, -\sqrt{5})$ و$(0, \sqrt{5})$، تتناقص y على الفترات $(-\infty, -\sqrt{5}]$ و$[0, \sqrt{5}]$.

(4) $f'(x) = x\frac{1}{2\sqrt{4-x}}(-1) + \sqrt{4-x} = \frac{-3x+8}{2\sqrt{4-x}}$

(أ) تحدث القيمة العظمى المحلية عند النقطة الحرجة $x = \frac{8}{3}$ والقيمة الصغرى المحلية عند النقطة الطرفية $x = 4$. هناك القيمة العظمى عند $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$ أو $(2.67, 3.08)$ وقيمة محلية صغرى عند $(4, 0)$.

(ب) حيث إن $f'(x) > 0$ على الفترة $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$. تتزايد $f(x)$ عند $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

(جـ) حيث إن $f'(x) < 0$ على الفترة $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$. تتناقص $f(x)$ على الفترة $\left[\frac{8}{3}, 4\right]$

(5) $g'(x) = x^{1/3}(1) + \frac{1}{3}x^{-2/3}(x+8) = \frac{4x+8}{3x^{2/3}}$

(أ) قد تحدث القيمة القصوى المحلية عند النقاط الحرجة $x = -2$ و $x = 0$ لكن المشتقة موجبة على جانبي $x = 0$ ولا توجد قيم قصوى عندها هناك قيمة محلية صغرى (مطلقة) عند $(-2, -6\sqrt{2})$ أو $(-2, -7.56)$ تقريبًا.

(ب) حيث $g'(x) > 0$ على الفترات $(-2, 0)$ و$(0, \infty)$ و$g(x)$ متصلة عند $x = 0$ تتزايد. $g(x)$ على الفترة $[-2, \infty)$

(جـ) حيث $g'(x) < 0$ على الفترة $(2, -\infty)$. تتناقص $g(x)$ على الفترة $[2, -\infty)$.

(6) (أ) $k'(x) = \frac{(x^2-4)(1) - x(2x)}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$. حيث $k'(x)$ لا تساوي أبدًا صفرًا وهي غير معرفة فقط حين $k(x)$ غير معرفة. ما من نقاط حرجة. بما أنه ليس هناك نقاط حرجة، ولا يتضمن المجال أي نقاط متطرفة. ما من قيمة محلية قصوى لـ $k(x)$.

(ب) حيث $k'(x)$ لا تكون أبدًا موجبة. لا تتزايد $k(x)$ على أي فترة.