(7) $y' = \frac{2}{5}x^{-4/5}$

الفترات	$x < 0$	$0 < x$
إشارة y'	+	+
سلوك y	متزايدة	متزايدة

$$y'' = -\frac{8}{25}x^{-9/5}$$

الفترات	$x < 0$	$0 < x$
إشارة y''	+	−
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل

(أ) $(-\infty, \infty)$

(ب) غير موجودة

(جـ) $(-\infty, 0)$

(د) $(0, \infty)$

(هـ) غير موجودة

(و) $(0, 3)$

(8) $y' = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -2x, & x > 1 \end{cases}$

الفترات	$x < 1$	$1 < x$
إشارة y'	+	−
سلوك y	متزايدة	متناقصة

$$y'' = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$$

الفترات	$x < 1$	$1 < x$
إشارة y''	0	−
سلوك y	خطية	مقعرة لجهة أسفل

(أ) $(-\infty, 1)$

(ب) $[1, \infty)$

(جـ) غير موجودة

(د) $(1, \infty)$

(و) غير موجودة

(هـ) غير موجودة

(9) نستخدم هذا التمرين لحل الطرق البيانية أو الطرق التحليلية حيث $-3 \le x \le 3$.

$$y' = x^2 \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x) + \sqrt{9-x^2}(2x) = \frac{-3x^3 + 18x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-3x(x^2-6)}{\sqrt{9-x^2}}$$

الفترات	$-3 < x < -\sqrt{6}$	$-\sqrt{6} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{6}$	$\sqrt{6} < x < 3$
إشارة y'	+	−	+	−
سلوك y	متزايدة	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y'' = \frac{(\sqrt{9-x^2})(-9x^2+18) - (-3x^3+18x)\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{(\sqrt{9-x^2})^2}$$

$$= \frac{(9-x^2)(-9x^2+18) + (-3x^3+18x)(x)}{(9-x^2)^{3/2}} = \frac{6x^4 - 81x^2 + 162}{(9-x^2)^{3/2}}$$

أوجد أصفار y'':

$$\frac{3(2x^4 - 27x^2 + 54)}{(9-x^2)^{3/2}} = 0$$

$$2x^4 - 27x^2 + 54 = 0$$

$$x^2 = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4(2)(54)}}{2(2)} = \frac{27 \pm 3\sqrt{33}}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{27 - 3\sqrt{33}}{4}} \approx \pm 1.56$$

لاحظ أننا لا نستخدم $x = \pm\sqrt{\frac{27 + 3\sqrt{33}}{4}} \approx \pm 3.33$ لأن هذه القيم لا تنتمي إلى المجال.

الفترات	$-3 < x < -1.56$	$-1.56 < x < 1.56$	$1.56 < x < 3$
إشارة y''	−	+	−
سلوك y	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل

(أ) $[-3, -\sqrt{6}]$ و $[0, \sqrt{6}]$ أو $[-3, -2.45]$ و $[0, 2.45]$.

(ب) $[-\sqrt{6}, 0]$ و $[\sqrt{6}, 3]$ أو $[-2.45, 0]$ و $[2.45, 3]$.

(جـ) تقريبًا $(-1.56, 1.56)$

(د) تقريبًا $(-3, -1.56)$ و $(1.56, 3)$

(هـ) قيمة محلية عظمى عند $(\pm\sqrt{6}, 6\sqrt{3})$ وقيمة صغرى عند $(0, 0)$ و $(\pm 3, 0)$

(و) $(\pm 1.56, 6.25)$

(10) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
إشارة y'	+	−	+
سلوك y	متزايدة	متناقصة	متزايدة

(أ) $(-\infty, 0]$، $[2, \infty)$

(ب) $[0, 2]$

$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$

الفترات	$x < 1$	$x > 1$
إشارة y''	−	+
سلوك y	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(جـ) $[1, +\infty)$

(د) $(-\infty, 1]$

(هـ) قيمة محلية عظمى عند $(0, 5)$ قيمة محلية صغرى عند $(2, 1)$

(و) نقطة انقلاب $(1, 3)$

(11) $y = x^{3/4}(5-x) = 5x^{3/4} - x^{7/4}$، حيث $x \geq 0$

$$y' = \frac{15}{4}x^{-1/4} - \frac{7}{4}x^{3/4} = \frac{15 - 7x}{4x^{1/4}}$$

الفترات	$0 < x < \frac{15}{7}$	$\frac{15}{7} < x$
إشارة y'	+	−
سلوك y	متزايدة	متناقصة

$$y'' = -\frac{15}{16}x^{-5/4} - \frac{21}{16}x^{-1/4} = \frac{-3(7x+5)}{16x^{5/4}}$$

حيث $y'' < 0$ لكل قيم $x > 0$، الرسم البياني لـ y هو مقعر لأسفل لـ $x > 0$.

(أ) $\left[0, \frac{15}{7}\right]$

(ب) $\left[\frac{15}{7}, \infty\right)$

(جـ) غير موجودة

(د) $(0, \infty)$

(هـ) قيمة محلية (مطلقة) عظمى عند $\left(\frac{15}{7}, 5.06\right) \approx \left(\frac{15}{7}, \left(\frac{15}{7}\right)^{3/4} \frac{20}{7}\right)$ قيمة محلية صغرى عند $(0, 0)$

(و) غير موجودة

(12) $y = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$

$$y' = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4x-4}{3x^{2/3}}$$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
إشارة y'	$-$	$-$	$+$
سلوك y	متناقصة	متناقصة	متزايدة

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-2/3} + \frac{8}{9}x^{-5/3} = \frac{4x+8}{9x^{5/3}}$$

الفترات	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x$
إشارة y''	$+$	$-$	$+$
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) $[1, \infty)$

(ب) $(-\infty, 1]$

(جـ) $(-\infty, -2)$ و $(0, \infty)$

(د) $(-2, 0)$

(هـ) قيمة محلية صغرى عند $(-3, 1)$

(و) $\left(-2, 6\sqrt[3]{2}\right) \approx (-2, 7.56)$ و $(0, 0)$

(13) $y = x^{1/4}(x+3) = x^{5/4} + 3x^{1/4}$، حيث $x \geq 0$

$$y' = \frac{5}{4}x^{1/4} + \frac{3}{4}x^{-3/4} = \frac{5x+3}{4x^{3/4}}$$

حيث $y' > 0$ لكل قيم $x > 0$. y دائمًا متزايدة في مجال $x \geq 0$.