(9) نصف قطر العلبة r هو بالـ cm وارتفاعها h هو بالـ cm. ثم $\pi r^2 h = 1000$ إذًا $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. مساحة المعدن المستخدم هي: $A = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$ إذًا $\frac{dA}{dr} = 2\pi r - 2000r^{-2} = \frac{2\pi r^3 - 2000}{r^2}$ تحدث النقطة الحرجة عند $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = 10\pi^{-1/3}\text{cm}$. حيث $\frac{dA}{dr} =< 0$ لـ $0 < r < 10\pi^{-1/3}$ و $\frac{dA}{dr} => 0$ لـ $r > 10\pi^{-1/3}$. تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من المواد المستخدمة لصنع العلبة الأقل سماكة. الأبعاد هي: $r = 10\pi^{-1/3} \approx 6.83\,cm$ و $h = 10\pi^{-1/3} \approx 6.83\,cm$.

(10) لتكن x طول نصف قاعدة المخروط وارتفاعه $y + 3$. بالعودة إلى مقدمة المسألة. حيث $x^2 + y^2 = 9$ لدينا $x = \sqrt{9 - y^2}$ حجم المخروط يعطى حسب: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 (y + 3) = \frac{1}{3}\pi(9 - y^2)(y + 3) = \frac{\pi}{3}(-y^3 - 3y^2 + 9y + 27)$ لذلك. $0 < y < 3$ إذًا النقطة الحرجة في الفترة $\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}(-3y^2 - 6y + 9) = -\pi(y^2 + 2y - 3) = -\pi(y + 3)(y - 1)$ $(0, 3)$ هي $y = 1$ حيث $\frac{dV}{dy} > 0$ لـ $0 < y < 1$ و $\frac{dV}{dy} < 0$ لـ $1 < y < 3$ تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى. التي تساوي (وحدة مكعبة) $V(1) = \frac{32\pi}{3}$.

(11) تربيع المسافة هو: $D(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} + 0\right)^2 = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$. إذًا $D'(x) = 2x - 2$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x = 1$ حيث $D'(x) < 0$ لـ $x < 1$ و $D'(x) > 0$ لـ $x > 1$ تناظر النقطة الحرجة المسافة الأصغر. التي هي $\sqrt{D}(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(1) ترمز x إلى طول المستطيل بالبوصة $(x > 0)$. ثم عرضه هو $\frac{16}{x}$ ومحيطه $P(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2x + \frac{32}{x}$ حيث $P'(x) = 2 - 32x^{-2} = \frac{2(x^2 - 16)}{x^2}$ تحدث النقطة الحرجة عند $x = 4$ حيث إن $P'(x) < 0$ لـ $0 < x < 4$ إن المحيط الأصغر الممكن هو: $P(4) = 16$ in وأبعاد المستطيل هي 4 in $\times$ 4 in.

(2) إذا كان الرأس الأعلى الأيمن للمستطيل في الربع الأول عند $(x, 12 - x^2)$ لـ $0 < x < \sqrt{2}$ إذًا أبعاد المستطيلات هي $2x$ و $12 - x^2$ والمساحة $A(x) = 2x(12 - x^2)$ ثم $A'(x) = 24 - 6x^2$. تحدث النقطة الحرجة $(0 < x < \sqrt{12})$ عند $x = 2$ حيث إن $A'(x) > 0$ لـ $0 < x < 2$ و $A'(x) < 0$ لـ $2 < x < \sqrt{12}$. تناظر هذه النقطة الحرجة المساحة العظمى. المساحة الكبرى الممكنة هي $A(2) = 32$ والأبعاد هي 8×4.

(3) لتكن x الطول الجانبي للمربع المقطوع $(0 < x < 4)$. فيكون بعدا قاعدته $(8 - 2x)$ in $\times$ $(15 - 2x)$ in والحجم هو: $V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$ ثم $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 4(3x - 5)(x - 6)$ ثم تحدث النقطة الحرجة (في $0 < x < 4$) عند $x = \frac{5}{3}$. حيث $V'(x) > 0$ لـ $0 < x < \frac{5}{3}$ و $V'(x) < 0$ لـ $\frac{5}{3} < x < 4$ تعود النقطة الحرجة إلى الحجم الأكبر الذي هو $V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{7} \approx 90.74 \text{ in}^3$ والأبعاد هي $\frac{5}{3}$ in $\times$ $\frac{14}{3}$ in $\times$ $\frac{35}{3}$ in.

(4) إذا كانت أبعاد الأرض قبل تقسيمها x m $\times$ $\frac{216}{x}$ m فإننا نحتاج سياجًا بثلاثة أبعاد طول كل منها x m وبعدين طول كل منهما $\frac{216}{x} m$ فيكون طول السياج $f(x) = 3x + 2\frac{216}{x} = 3x + 432x^{-1}$. ثم $f'(x) = 3 - 432x^{-2}$ والنقطة الحرجة $(x > 0)$ عند $x = 12$ حيث إن $f'(x) < 0$ لـ $0 < x < 12$ و $f'(x) > 0$ لـ $x > 12$ تناظر النقطة الحرجة المجموع الصغير لطول السياج ستكون مساحة الأرض 12 m $\times$ 18 m. ونحتاج إلى $f(12) = 72$ m من السياج بالمجمل.

(5) (أ) لاحظ أن $x^2 y = 1125$. إذًا $y = \frac{1125}{x^2}$ إذًا

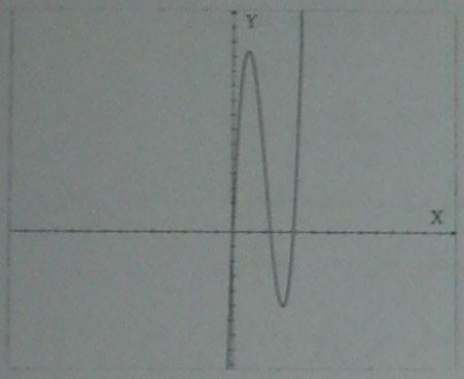
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy = 5x^2 + 30xy$$
$$= 5x^2 + 30x\left(\frac{1125}{x^2}\right) = 5x^2 + 33750x^{-1}$$
$$\frac{dc}{dx} = 10x - 33750x^{-2} = \frac{10(x^3 - 3375)}{x^2}$$

تحدث النقطة الحرجة عند $x = 15$. حيث $\frac{dc}{dx} < 0$ لـ $0 < x < 15$ و $\frac{dc}{dx} > 0$ لـ $x > 15$ تناظر النقطة الحرجة القيمة الصغرى. قيمتا x و y هما $x = 15$ ft و $y = 5$ ft.

(ب) التكلفة لصنع الخزان هي 5 Dh/sq ft وتكلفة الحفر هي 10 دراهم تقريبًا لكل قدم مربعة لمساحة سطح الثقب.

(6) x هي الارتفاع بالبوصة للمساحة المطبوعة ثم عرض المساحة للمطبوعة هو $\frac{50}{x}\ in$ أما الأبعاد بالإجمال فهي $(x+8)\text{ in} \times \left(\frac{50}{x}+4\right)\text{ in}$ إجمالي الورق المستخدم هو، $A(x) = (x+8)\left(\frac{50}{x}+4\right) = 4x + 82 + \frac{400}{x}\ in^2$.
$A'(x) = 4 - 400x^{-2} = \frac{4(x^2-100)}{x^2}$ وتحدث النقطة الحرجة لـ $(x > 0)$ عند $x = 10$ حيث إن $A'(x) < 0$ لـ $0 < x < 10$ و $A'(x) > 0$ لـ $x > 10$ تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من الورق. باستخدام $x + 8$ و $\frac{50}{x} + 4$ لـ $x = 10$ الكميات بمجملها هي (عرض) $18\text{ in} \times 9\text{ in}$.

(7) لاحظ أن $\pi r^2 h = 1000$ إذًا، $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ ثم $A = 8r^2 + 2\pi rh = 8r^2 + \frac{2000}{r}$. إذًا
$\frac{dA}{dr} = 16r - 2000r^{-2} = \frac{16(r^3-125)}{r^2}$.
تحدث النقطة الحرجة عند $r = \sqrt[3]{125} = 5\text{ cm}$ بما أن $\frac{dA}{dr} < 0$ $(0 < r < 5)$ و $\frac{dA}{dr} > 0$ $r > 5$ لذا تناظر النقطة الحرجة أقل كمية ألومنيوم مستخدمة أو تالفة، ثم أكثر علبة اقتصادية. الأبعاد هي $r = 5\ cm$ و $h = \frac{40}{\pi}$. إذًا نسبة h الى r هي $\frac{8}{\pi}$ إلى 1.



(8) (أ) أبعاد القاعدة $\frac{15-2x}{2}\text{ in} \times (10-2x)\text{ in}$. إذًا الصيغة التي تعبر عن حجم الصندوق هي:

$$V(x) = \frac{x(10-2x)(15-2x)}{2} = 2x^3 - 25x^2 + 75x$$

(ب) بما أن $x > 0$، و $2x < 10$، $2x < 15$ إذا دمجنا هذه الشروط فيكون المجال هو الفترة $(0, 5)$.

(جـ) الحجم الأكبر هو 66.02 in^3 تقريبًا حيث $x \approx 1.96\text{ in}$.

(د) $V'(x) = 6x^2 - 50x + 75$ تحدث النقطة الحرجة حيث $V'(x) = 0$
عند $x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(6)(75)}}{2(6)} = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{12} = \frac{25 \pm 5\sqrt{7}}{6}$. $x \approx 6.37$ أو $x \approx 1.96$.
نلغي القيمة الكبرى لأنها لا تنتمي إلى المجال. حيث $V''(x) = 12x - 50$ التي هي سالبة عندما $x \approx 1.96$ تناظر النقطة الحرجة الحجم الأكبر. يحدث الحجم الأكبر عندما، $x = \frac{25-5\sqrt{7}}{6} \approx 1.96$ التي تؤكد النتيجة في (جـ).

(9) (أ) ستكون أبعاد علبة الحلوى $2x\ in \times (24-2x)\ in \times (18-2x)\ in$ إذًا الصيغة التي تعبر عن حجم الصندوق هي:

$$V(x) = 2x(24-2x)(18-2x) = 8x^3 - 168x^2 + 864x$$

(ب) $x > 0$ و $2x < 18$ و $2x < 24$ إذا دمجنا هذه الشروط. يكون المجال في الفترة $(0, 9)$

(جـ) الحجم الأكبر هو 1309.95 in^3 حيث $x \approx 3.39\text{ in}$

(د) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864 = 24(x^2 - 14x + 36)$ النقطة الحرجة هي عند:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(36)}}{2(1)} = \frac{14 \pm \sqrt{52}}{2} = 7 \pm \sqrt{13}$$

إذًا، $x \approx 3.39$ أو $x \approx 10.61$. نلغي القيمة الكبرى لأنها لا تنتمي إلى المجال. حيث $V''(x) = 24(2x - 14)$ التي هي سالبة عند $x \approx 3.39$ تناظر النقطة الحرجة الحجم. يحدث الحجم الأكبر عند $x = 7 - \sqrt{13} \approx 3.39$ التي تؤكد الإجابة في (جـ).

(هـ) $8x^3 - 168x^2 + 864x = 1120$

$8(x^3 - 21x^2 + 108x - 140) = 0$

$8(x-2)(x-5)(x-14) = 0$

حيث 14 لا تنتمي إلى المجال. القيم الممكنة لـ x هي $x = 2$ in أو $x = 5$ in

(و) أبعاد علبة الحلوى التي حصلنا عليها هي $2x$ in و $(24-2x)$ in و $(18-2x)$ in. يجب أن يكون كل من الأبعاد موجب. هذا ما يعطي مجال $(0, 9)$.

(10) لتكن x المسافة من النقطة على ساحل المدينة بالقرب من قارب أحمد إلى النقطة حيث يُرسي قاربه. ثم هو يحتاج إلى التجديف مسافة $\sqrt{4+x^2}$ mi بسرعة 2 mi/h ويمشي مسافة $6-x$ بسرعة 5 mi/h ومنه، مجموع الوقت الضروري للوصول إلى القرية هو. $(0 \leq x \leq 6)$ ساعة $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{6-x}{5}$

لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}(2x) - \frac{1}{5} = \frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{5}$ نحل. $f'(x) = 0$

$$\frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 2\sqrt{4+x^2}$$

$$25x^2 = 4(4+x^2)$$

$$21x^2 = 16$$

$$x = \pm\frac{4}{\sqrt{21}}$$

نلغي القيمة السالبة لـ x لأنها لا تنتمي إلى المجال. إذا تحققنا من النقاط الطرفية والنقطة الحرجة، نحصل على: $f(0) = 2.2$ و $f\left(\frac{4}{21}\right) \approx 2.12$ و $f(6) \approx 3.16$ فتكون $x = \frac{4}{\sqrt{21}}$ هي التي تعطي أقل زمن ممكن.

(11) حيث إن $2x + 2y = 36$ نعلم أن $y = 18 - x$. في الجزء (أ)، نصف القطر هو $\frac{x}{2\pi}$ والارتفاع هو $18-x$ إذًا يعطى الحجم بحسب $\pi r^2 h = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 (18-x) = \frac{1}{4\pi}x^2(18-x)$. في الجزء (ب)، نصف قطر x والارتفاع هو $18-x$ فالحجم معطى بحسب $\pi r^2 h = \pi x^2(18-x)$. تتطلب كل مسألة منا أن نجد قيمة x التي تعطي قيمة عظمى لـ $f(x) = x^2(18-x)$ في الفترة $0 < x < 18$ فيصبح للمسألتين الإجابة نفسها لحل مسألة أخرى. لاحظ أن $f(x) = 18x^2 - x^3$ وهكذا، لـ $f'(x) = 36x - 3x^2 = -3x(x-12)$ تحدث النقطة الحرجة عند $x = 12$ حيث إن $f'(x) > 0$ لـ $0 < x < 12$ و $f'(x) < 0$ لـ $12 < x < 18$ تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى لـ $f(x)$. لإيجاد القيمة الكبرى في الجزء (أ) أو الجزء (ب) لتكن $x = 12$ cm و $y = 6$ cm.

(12) لاحظ أن $h^2 + r^2 = 3$ وهكذا. $r = \sqrt{3-h^2}$ ثم. يُعطى الحجم بـ $V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(3-h^2)h = \pi h - \frac{\pi}{3}h^3$ وهكذا. $\frac{dV}{dh} = \pi - \pi h^2 = \pi(1-h^2)$ تحدث النقطة الحرجة لـ $(h > 0)$ عند $h = 1$. حيث إن $0 < h < \sqrt{3}$)وهكذا. $\frac{dV}{dh} > 0$ لـ $0 < h < 1$ و $\frac{dV}{dh} < 0$ لـ $1 < h < \sqrt{3}$. تناظر النقطة الحرجة الحجم الأكبر للمخروط حيث نصف قطر $\sqrt{2}$ m وارتفاع 1 m وحجم $\frac{2\pi}{3}$ m^3.

(13) (أ) النقطة الحرجة لـ $f(x)$ عند $x = 2$ حيث $f'(x) = 2x - ax^{-2}$. لدينا $f'(2) = 4 - \frac{a}{4}$. ما يجب التوصل إليه هو أن $4 - \frac{a}{4} = 0$ بالتالي، $a = 16$ لتبرهن أن النقطة الحرجة تناظر القيمة الصغرى المحلية. نلاحظ أن $f'(x) = 2x - 16x^{-2}$ وهكذا $f''(x) = 2 + 32x^{-3}$. إذا، $f''(2) = 6$ موجبة، عندها $a = 16$.