(أ) $x^2 + y^2 = 169$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

إذًا $y = \sqrt{169 - x^2} = \sqrt{169 - 12^2} = 5$ للتقييم. لاحظ أن عند اللحظة موضوع البحث.

$$2(12)(5) + 2(5)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\left(-\frac{dy}{dt} = 12\,ft/\sec,\right); \frac{dy}{dt} = -12\,ft/\sec$$

ينزلق الطرف العلوي للسلم على الحائط بمعدل 12 ft/sec. (لاحظ أن معدل تحرك الطرف السفلي موجب)

(ب) $A = \frac{1}{2}xy$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)$$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}[(12)(-12) + (5)(5)] = -\frac{119}{2}\ ft^2/\sec$ باستخدام إجابات الخطوة 2 ومن الجزء (أ)، لدينا

تتغير مساحة المثلث عند المعدل $-59.5\ \text{ft}^2/\sec$

(جـ) $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

حيث $\tan\theta = \frac{5}{12}$ لدينا $\left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ وهكذا، $\cos\theta = \frac{12}{13}$ و $\sec^2\theta = \frac{1}{\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{169}{144}$

بدمج إجابات الخطوة 2 والجزء (أ) نحصل على: $\frac{169}{144}\frac{d\theta}{dt} = \frac{(12)(-12) - (5)(5)}{12^2}$

إذًا، $\frac{d\theta}{dt} = -1\ \text{rad/sec}$ تتغير الزاوية عند المعدل -1rad/sec

(7) r = نصف قطر قاعدة كومة الرمل المخروطيّة. h = ارتفاع كومة الرمل المخروطيّة. V = حجم كومة الرمل المخروطيّة.

عند اللحظة موضوع البحث، $h = 4\ \text{m}$ و $\frac{dV}{dt} = 10\ \text{m}^3/\text{min}$

علينا إيجاد $\frac{dr}{dt}, \frac{dh}{dt}$

الارتفاع يساوي $\frac{3}{8}$ قطر القاعدة. لدينا $h = \frac{3}{8}(2r)$ أو $r = \frac{4}{3}h$

لدينا أيضًا $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h = \frac{16\pi h^3}{27}$ سنستخدم المعادلات: $r = \frac{4}{3}h$ و

(أ) $$\frac{dV}{dt} = \frac{16\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{16\pi(4)^2}{9}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{45}{128\pi}m/\text{min} = \frac{1125}{32\pi}cm/\text{min}$$

يتغير الارتفاع بمعدّل $\frac{1125}{32\pi} \approx 11.19\text{cm/min}$

(ب) باستخدام إجابات الخطوة 4 والجزء (أ)، لدينا: $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt} = \frac{4}{3}\left(\frac{1125}{32\pi}\right) = \frac{375}{8\pi}$ cm/ min

يتغير نصف القطر بمعدل $\frac{375}{8\pi} \approx 14.92$ cm/ min

(8) r = نصف قطر سطح المياه.

h = عمق المياه في الخزان.

V = حجم المياه في الخزان.

عند اللحظة موضوع البحث، $\frac{dV}{dt} = -50\ m^3/\min$ و $h = 5$ cm

علينا إيجاد $\frac{dr}{dt}, \frac{-dh}{dt}$

لاحظ أن $\frac{h}{r} = \frac{6}{45}$ بحسب تشابة الأشكال المخروطية، إذًا $r = 7.5h$. ثم

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7.5h)^2 h = 18.75\pi h^3$$

(أ) حيث $V = 18.75\pi h^3$، إذًا $\frac{dV}{dt} = 56.25\pi h^2 \frac{dh}{dt}$. لذلك، $-50 = 56.25\pi(5^2)\frac{dh}{dt}$ وهكذا،
$\frac{dh}{dt} = -\frac{8}{225\pi}$ m/ min $= \frac{-32}{9\pi}$ cm/ min. يتناقص ارتفاع مستوى سطح المياه بـ $\frac{32}{9\pi} \approx 1.13$ cm/ min
($\frac{dh}{dt} < 0$، المعدل حيث يتناقص ارتفاع سطح المياه)

(ب) $r = 7.5h$ و $\frac{dr}{dt} = 7.5\frac{dh}{dt} = -\frac{80}{3\pi}$ cm/ min

معدل تغير نصف قطر مستوى المياه هو: $\frac{-80}{3\pi} \approx -8.49$ cm/ min

(9) (أ) r = نصف قطر بالون كروي.

S = مساحة بالون كروي. V = حجم بالون كروي.

عند اللحظة موضوع البحث، $\frac{dV}{dt} = 100\pi\ \text{ft}^3/\min$ و $r = 5$ ft

علينا إيجاد قيم $\frac{ds}{dt}, \frac{dr}{dt}$

(أ)
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$100\pi = 4\pi(5)^2 \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = 1\,ft/\min$$

يتزايد نصف القطر بمعدل 1 ft/ min

(ب)
$$S = 4\pi r^2$$
$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dS}{dt} = 8\pi(5)(1)$$
$$\frac{dS}{dt} = 40\pi\ \text{ft}^2/\min$$

تتزايد المساحة عند المعدل $40\pi\ \text{ft}^2 = \min$

* إجابات المجموعة B

(1) حيث $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$ يكون لدينا $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

(2) حيث $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr}\frac{dr}{dt}$ يكون لدينا $\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$

(3) $\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(RI^2)$ (أ)

$$\frac{dP}{dt} = R\frac{d}{dt}I^2 + I^2\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = R\left(2I\frac{dI}{dt}\right) + I^2\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = 2RI\frac{dI}{dt} + I^2\frac{dR}{dt}$$

(ب) إذا كانت P هي ثابتة، لدينا $\frac{dP}{dt} = 0$. ما يعني $2RI\frac{dI}{dt} + I^2\frac{dR}{dt} + I^2\frac{dR}{dt} = 0$

أو $\frac{dR}{dt} = -\frac{2R}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{2P}{I^3}\frac{dI}{dt}$.

(4) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(5) $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ab\sin\theta\right)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}b\sin\theta + a\frac{db}{dt}\sin\theta + ab\frac{d}{dt}\sin\theta\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(b\sin\theta\frac{da}{dt} + a\sin\theta\frac{db}{dt} + ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

(6) r = نصف قطر الطبق.

A = مساحة الطبق.

عند اللحظة موضوع البحث: $r = 50$ cm ; $\frac{dr}{dt} = 0.01$ cm/ sec

علينا إيجاد $\frac{dA}{dt}$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

عند اللحظة موضوع البحث، $\frac{dA}{dt} = 2\pi(50)(0.01) = \pi$ cm^2 / sec. تتزايد المساحة عند معدّل π cm^2 / sec.

(7) x, y, z = أبعاد الصندوق.

V = حجم الصندوق. S = مساحة الصندوق.

s = طول قطر الصندوق.

عند اللحظة موضوع البحث، $\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sec}, \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}, x = 4 \text{ m}, y = 3 \text{ m}, z = 2 \text{ m}.$

علينا إيجاد $\frac{dV}{dt}, \frac{dS}{dt}, \frac{ds}{dt}$

(أ)

$$V = xyz$$

$$\frac{dV}{dt} = xy\frac{dz}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + yz\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = (4)(3)(1) + (4)(2)(-2) + (3)(2)(1) = 2 \text{ m}^3/\text{sec}$$

معدل تغير الحجم هو $2 \text{ m}^3/\text{sec}$

(ب)

$$S = 2(xy + xz + yz)$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} + x\frac{dz}{dt} + z\frac{dx}{dt} + y\frac{dz}{dt} + z\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = 2[(4)(-2) + (3)(1) + (4)(1) + (2)(1) + (3)(1) + (2)(-2)] = 0 \text{ m}^2/\text{sec}$$

معدل تغير المساحة هو $0 \text{ m}^2/\text{sec}$

(جـ)

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dy}\right)$$

$$= \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(4)(1) + (3)(-2) + (2)(1)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{29}} = 0 \text{ m/sec}$$

معدل تغير طول قطر الصندوق هو 0 m/sec