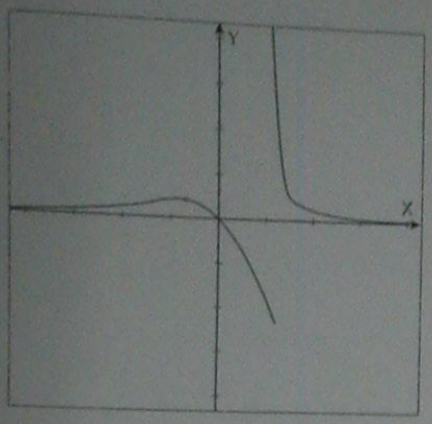


$$y' = \frac{(x^3-1)(1)-(x)(3x^2)}{(x^3-1)^2} = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$$ **(6)**

الفترات	$x < -2^{-1/3}$	$-2^{-1/3} < x < 1$	$1 < x$
إشارة y'	+	−	−
سلوك y	متزايدة	متناقصة	متناقصة

$$y'' = -\frac{(x^3-1)^2(6x^2)-(2x^3+1)(2)(x^3-1)(3x^2)}{(x^3-1)^4}$$

$$= -\frac{(x^3-1)(6x^2)-(2x^3+1)(6x^2)}{(x^3-1)^3} = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

الفترات	$x < -2^{1/3}$	$-2^{1/3} < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
إشارة y''	+	−	−	+
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) $(-\infty, -0.794]$

(ب) $[-0.794, 1)$ ، $(1, \infty)$

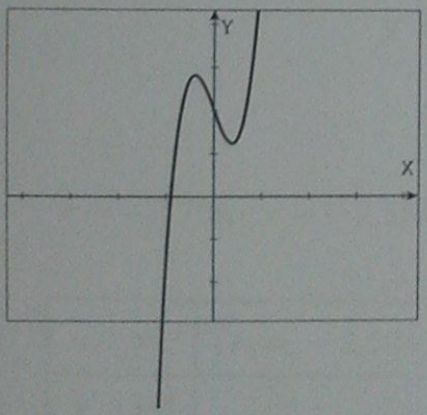
(جـ) $(-\infty, -1.260)$ ، $(1, \infty)$

(د) $(-1.260, 1)$

(هـ) قيمة عظمى محلية عند $(-0.794, 0.529)$ قيمة صغرى محلية عند $(-1.260, 0.529)$

(7) $y = x^3 - 3x + 6$ المجال $(-\infty, +\infty)$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$



الفترات	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
إشارة y'	+	−	+
سلوك y	متزايدة	متناقصة	متزايدة

$$y'' = 6x$$

الفترات	$x < 0$	$x > 0$
إشارة y''	−	+
سلوك y	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) $[1, +\infty)$ ، $(-\infty, -1]$

(ب) $[-1, 1]$

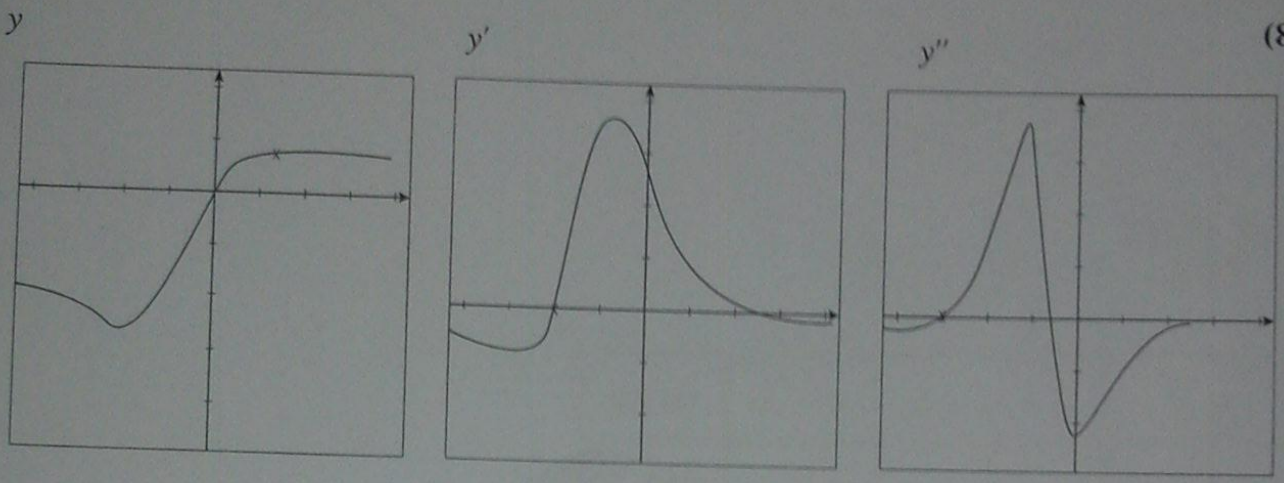
(جـ) $[0, +\infty)$

(د) $(-\infty, 0]$

(هـ) قيمة عظمى محلية عند $(-1, 8)$ قيمة صغرى محلية عند $(1, 4)$

(و) $(0, 6)$

(8)



$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 3)(1) - (x)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

الفترات	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x$
إشارة y'	−	+	−
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y'' = \frac{(x^2 + 2x + 3)^2(-2x) - (-x^2 + 3)(2)(x^2 + 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^4}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 3)(-2x) - 2(2x + 2)(-x^2 + 3)}{(x^2 + 2x + 3)^3} = \frac{2x^3 - 18x - 12}{(x^2 + 2x + 3)^3}$$

باستخدام الطريقة البيانية. أصفار $2x^3 - 18x - 12$ (كذلك لـ y'') هي عند $x \approx -2.584$ و $x \approx -0.706$ و $x \approx 3.290$

الفترات	$(-\infty, -2.584)$	$(-2,584, -0.706)$	$(-0.706, 3.290)$	$(3.290, \infty)$
إشارة y''	−	+	−	+
سلوك y	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(ب) $(-\infty, -\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3}, \infty)$

(جـ) $(-2.584, -0.706)$ و$(3.290, \infty)$ تقريبًا.

(د) $(-\infty, -2.584)$ و$(-0.706, 3.290)$ تقريبًا

(هـ) القيمة العظمى المحليّة عند $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) \approx (1.732, 0.183)$ القيمة الصغرى المحليّة عند

$$-\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}-1}{4}\right) \approx (-1.732, -0.683)$$

(و) $(-2.584, -0.573)$ و$(-0.706, -0.338)$ و$(3.290, 0.161)$

(9)

$$y = 2x^{4/5} - x^{9/5}$$

$$y' = \frac{8}{5}x^{-1/5} - \frac{9}{5}x^{4/5} = \frac{8-9x}{5\sqrt[5]{x}}$$

$$y'' = -\frac{8}{25}x^{\frac{-6}{5}} - \frac{36}{25}x^{\frac{-1}{5}} = -\frac{4(2+9x)}{25x^{6/5}}$$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < \frac{8}{9}$	$\frac{8}{9} < x$
إشارة y'	−	+	+
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y'' = -\frac{8}{9}x^{-6/5} - \frac{36}{25}x^{-1/5} = -\frac{4(2+9x)}{25x^{6/5}}$$

الفترات	$x < -\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{9} < x < 0$	$0 < x$
إشارة y''	+	−	+
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) $[0, \frac{8}{9}]$.

(ب) $(-\infty, 0]$ $[\frac{8}{9}, \infty)$.

(جـ) $(-\infty, -\frac{2}{9})$.

(د) $(-\frac{2}{9}, 0)$ و$(0, \infty)$.

(هـ) قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{8}{9}, \frac{10}{9}.\left(\frac{8}{9}\right)^{4/5}\right) \approx (0.889, 1.011)$. قيمة صغرى محلية عند $(0, 0)$.

(و) $\left(-\frac{2}{9}, \frac{20}{9}.\left(-\frac{2}{9}\right)^{4/5}\right) \approx \left(-\frac{2}{9}, 0.667\right)$

(10) $y' = 6(x+1)(x-2)^2$

الفترات	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x$
إشارة y'	−	+	+
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y'' = 6(x+1)(2)(x-2) + 6(x-2)^2(1) = 6(x-2)[(2x+2)+(x-2)] = 18x(x-2)$$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
إشارة y''	+	−	+
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) ما من قيم عظمى محلية.

(ب) هناك قيمة محلية (ومطلقة) صغرى عند $x = -1$.

(جـ) هناك نقاط انقلاب عند $x = 0$ وعند $x = 2$

(11) $y' = 6(x+1)(x-2)$

الفترات	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x$
إشارة y'	+	−	+
سلوك y	متزايدة	متناقصة	متزايدة

$$y'' = 6(2x-1)$$

الفترات	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
إشارة y'	−	+
سلوك y	مقعرة لأسفل	مقعرة لأعلى

(أ) هناك قيمة عظمى محليّة عند $x = -1$

(ب) هناك قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

(جـ) هناك نقطة إنقلاب عند $x = \frac{1}{2}$

(12) القيمة الصغرى المطلقة لـ $\frac{1}{2}$ عند $x = 2$

(13)(أ) كلتا قيم y' وy'' هي سالبة حيث يتناقص المنحنى ومقعّرته لأسفل. عند "T"

(ب) قيمة y' هي سالبة وقيمة y'' موجبة بحيث يتناقص المنحنى ومقعّرته لأعلى. عند P

(14)(أ) تتزايد الدالة في الفترة $(0, 2]$

(ب) تتناقص الدالة في الفترة $[-3, 0)$

(جـ) تحدث القيم العظمى المحلية فقط عند النقطة الطرفية لهذا المجال. تحدث قيمة عظمى محلية هي 1 عند $x = -3$ وتحدث قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) لـ 3 عند $x = 2$.

(15)(أ) نعلم أن f تتناقص عند $[0, 1]$ تتزايد عند $[1, 3]$، تحدث القيم الصغرى المطلقة عند $x = 1$ وتحدث القيم العظمى المطلقة عند النقاط الطرفية. حيث إن $f(0) = 0$ و$f(1) = -2$ و$f(3) = 3$ القيمة الصغرى المطلقة هي -2 $x = 1$ والقيمة العظمى المطلقة هي 3 عند $x = 3$.

(ب) لا يتغير تقعر المنحنى ما من نقاط انقلاب

(16)(أ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ هي دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق؛ $f'(x) = 3x^2 - 6x$ إذًا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

(ب) $f(3) = 5;\quad f(2) = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$$

$$3c^2 - 6c = \frac{5 - 1}{3 - 2}$$

$$3c^2 - 6c - 4 = 0 \Rightarrow c \simeq 2.53$$

(جـ) $A(2, 1),\ B(3, 5)$

معادلة (AB): $y = 4x - 7$

(د) معادلة المماس: $y = 4x - \frac{17}{2}$

(17)(أ) $V(t) = s'(t) = 4 - 6t - 3t^2$

(ب) $a(t) = V'(t) = -6 - 6t$

(جـ) يبدأ الجسيم عند المركز 3 ويتحرك باتجاه موجب، لكن بتباطؤ. عند $t = 0.528$ يصل إلى الموقع 4.128 ويغير اتجاهه، ليبدأ بالتوجه سلبًا بعد ذلك. تكمل الحركة بالتسارع عند التوجه سلبًا.

(18) r = نصف قطر الدائرة

A = مساحة الدائرة

في اللحظة المطلوبة، $\frac{dr}{dt} = \frac{-2}{\pi}$ m/ sec, $r = 10$ m

نريد إيجاد $\frac{dA}{tt}$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)\left(\frac{-2}{\pi}\right) = -40$$

تتغير المساحة بمعدل: $-40\ \text{m}^2/\text{sec}$

(19) x = الاحداثي السيني للجسيم

y = الاحداثي الصادي للجسيم

D = المسافة من الجسيم إلى نقطة الأصل.

في اللحظة المطلوبة، $y = 12\ m,\ x = 5\ m$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \text{ m/ sec}$$

$$\frac{dy}{dt} = -5 \text{ m/ sec}$$

نريد إيجاد: $\frac{dD}{dt}$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{5(-1) + 12(-5)}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = -5 \text{ mi/ sec}$$

حيث إن $\frac{dD}{dt}$ سالبة، فإن الجسيم يقترب من نقطة الأصل بمعدل موجب هو 5 m/ sec.