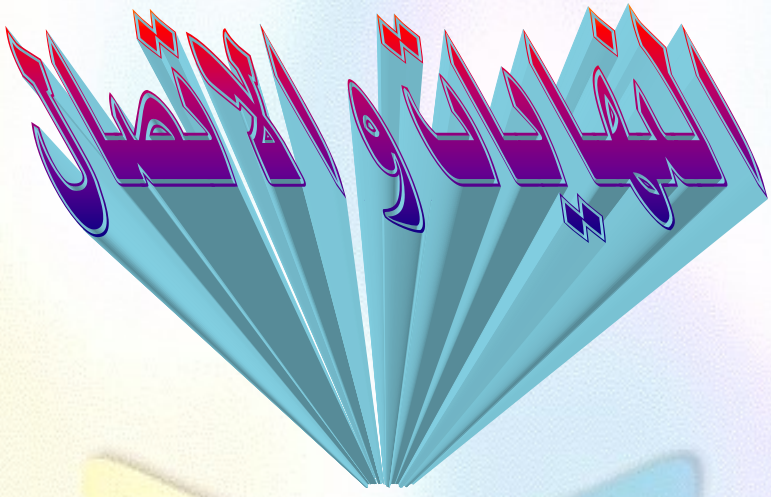
مجلس أبو ظبي للتعليـــم
أكاديمية بولاريس الخاصة

POLARIS PRIVATE ACADEMY

الرياضيات للثاني عشر العلمي

الفصل الدراسي الأول

2014 / 2013



اسم الطالب : .....

اعداد عبد الغني مصطفى زيتون

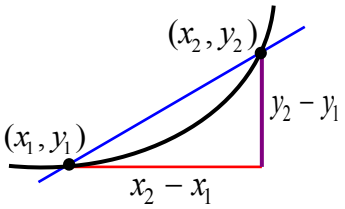
معدلات التغيّر و النهايات

معلومات رياضية :

إذا كانت $y = f(x)$ وتغيرت x من x_1 إلى x_2 فإن :

- التغير في x : $\Delta x = x_2 - x_1$
- التغير في y : $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

ويكون متوسط تغيّر الدالة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x :



$$\text{متوسط التغيّر} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad or \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

السرعة المتوسطة :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

حيث y المسافة ، t الزمن .

مثال:

سقطت صخرة من قمة جبل ، فإذا كانت المسافة التي يقطعها جسم سقط سقوطاً حراً تعطى بالعلاقة $y = 16\ t^2$

أ) أوجد السرعة المتوسطة خلال أول ثانيتين *32 ft / s*

.....

.....

.....

.....

.....

ب) أوجد سرعة الصخرة (السرعة اللحظية) عند اللحظة $t = 2$ *64 + 16 h*

.....

.....

.....

.....

.....

تعريف النهاية عند نقطة :

إذا كان L , c عددين حقيقيين ، فالدالة f يكون لها نهاية L عندما تقترب x من c . إذا أمكن جعل الفرق بين $f(x)$ و L قريباً من الصفر أو يساويه بأخذ قيم للمتغير x قريبة جداً من c ; $x \neq c$ وتكتب $\lim_{x \to c} f(x) = L$

* ونرى ذلك في المثال السابق (ب) حيث $\lim_{h \to 0} (64 + 16h) = 64$

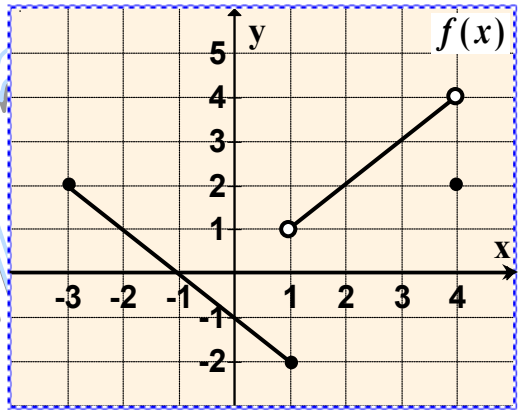
* قد تكون **نهاية الدالة موجودة** عند نقطة بالرغم من أن الدالة غير معرفة عند تلك النقطة .

إيجـــاد نهاية دالة بيانيـاً :

$$f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=L \iff \lim_{x\to c}\lim_{x\to c^-} f(x)=L$$

تمرين (1) *استخدم الشكل المجاور واملأ كلاً من الفراغات الآتية بما يناسب لتحصل على عبارة صحيحة :*

❶



① $f(1)=$ ..... ② $f(4)=$ .....

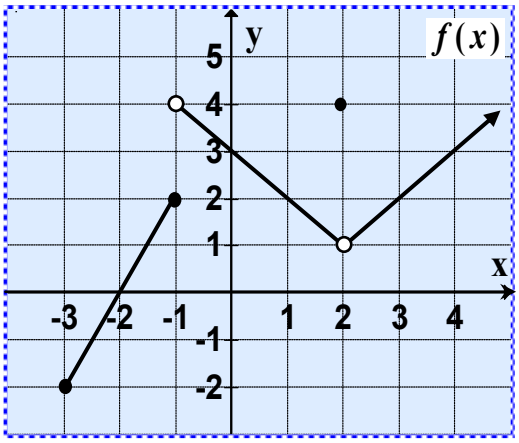
③ $\lim_{x\to 0} f(x)=$ ..... ④ $\lim_{x\to 3} f(x)=$ .....

⑤ $\lim_{x\to 2} f(x)=$ ..... ⑥ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=$ .....

⑦ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=$ ..... ⑧ $\lim_{x\to 1} f(x)$ .....

⑨ $\lim_{x\to 3} f(x)=$ ..... ⑩ $\lim_{x\to 4} f(x)=$ .....

❷



① $f(-1)=$ ..... ② $f(2)=$ .....

③ $\lim_{x\to 2} f(x)=$ ..... ④ $\lim_{x\to 0} f(x)=$ .....

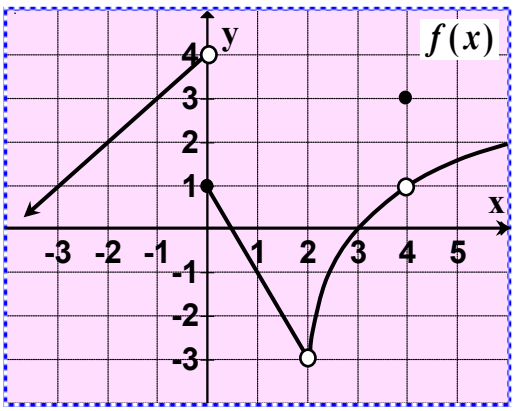
⑤ $\lim_{x\to -2} f(x)=$ ..... ⑥ $\lim_{x\to -1^-} f(x)=$ .....

⑦ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=$ ..... ⑧ $\lim_{x\to -1} f(x)=$ .....

⑨ $\lim_{x\to 2} f(x)=$ ..... ⑩ $\lim_{x\to -3} f(x)=$ .....

⑩ مجموعة قيم c التي عندها $\lim_{x\to c} f(x)=2$ هي .....

❸



① $f(1)=$ ..... ② $f(5)=$ .....

③ $\lim_{x\to 1} f(x)=$ ..... ④ $\lim_{x\to -2} f(x)=$ .....

⑤ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=$ ..... ⑥ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=$ .....

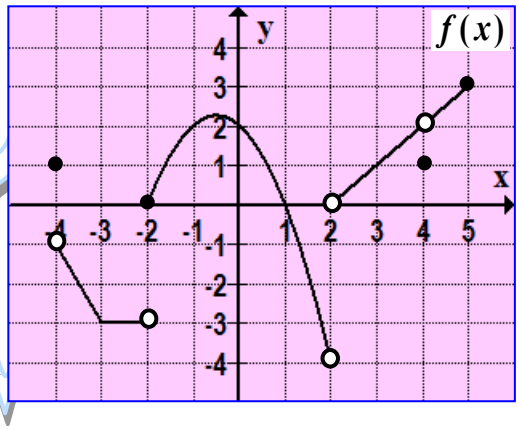
⑦ $\lim_{x\to 3} f(x)=$ ..... ⑧ $\lim_{x\to 4} f(x)$ .....

⑨ مجموعة قيم c التي عندها $\lim_{x\to c} f(x)=1$ هي .....

ABDU GHANI

تمرين (2) استخدم الشكل المجاور واملأ كلاً من الفراغات الآتية بما يناسب لتحصل على عبارة صحيحة :

❶



❶ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ..... ❷ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ .....

❸ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ..... ❹ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ .....

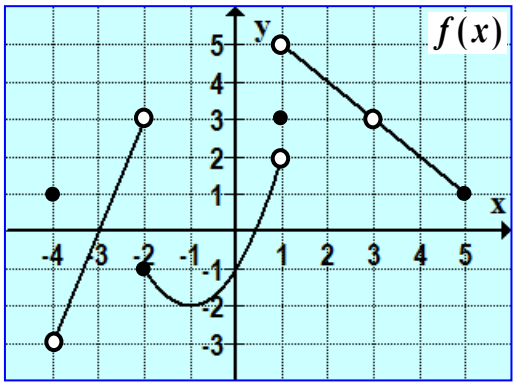
❺ $\lim\limits_{x\to -3} f^2(x)$ ..... ❻ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ .....

❼ $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$ ..... ❽ $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{2-f(x)}$ .....

✻❾ $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f^2(x)-9}{f(x)+3}$ .....

.....

❷



❶ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ..... ❷ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$ .....

❸ $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ ..... ❹ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ .....

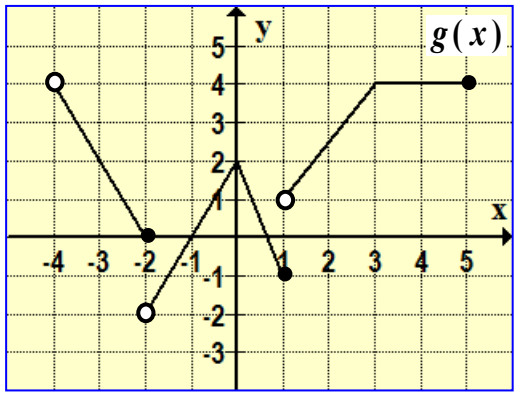
❺ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ ..... ❻ $f(1) =$ .....

❼ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ..... ❽ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) =$ .....

❾ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ ..... ❿ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ .....

✻ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f^2(x)-4}{f(x)+2}$ .....

❸



❶ $\lim\limits_{x\to -1} g(x) =$ ..... ❷ $\lim\limits_{x\to 3} g(x) =$ .....

❸ $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) =$ ..... ❹ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) =$ .....

❺ $\lim\limits_{x\to \frac{9}{2}} g(x) =$ ..... ❻ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-2}{x-1} =$ .....

❼ $\lim\limits_{x\to -2} g(x) =$ ..... ❽ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{g(x)-1} =$ .....

✻❾ $\lim\limits_{x\to 1} |g(x)|$ .....

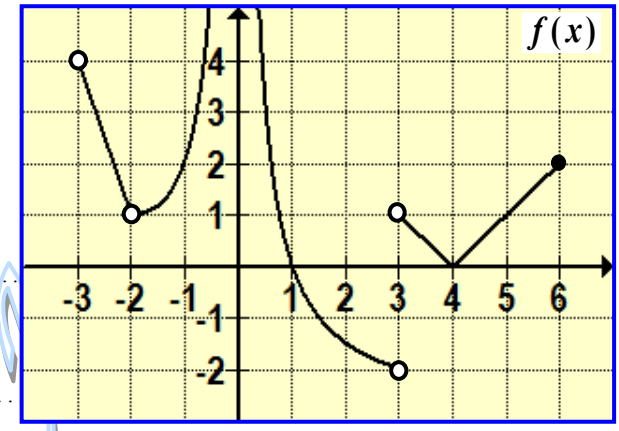
.....

ABDULGHANI.M

$g(x)$
$g(x)$

تمرين (3)

❶ الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة التالية :



① $\lim_{x\to 0} f(x)$ .....

② $\lim_{x\to 4} \sqrt{f(x)}$ .....

③ $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$ .....

④ $\lim_{x\to 3^-} (|f(x)| + [x])$ .....

⑤ $\lim_{x\to -2} \dfrac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$ .....

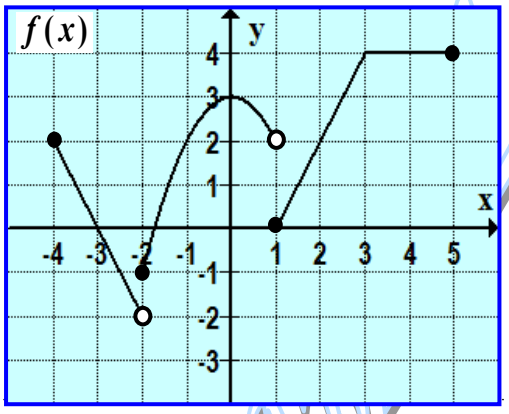
.....

⑥ ما مجموعة النقاط التي تكون عندها فقط النهاية للدالة $f(x)$ من اليمين تساوي 1 .....

⑦ ما مجموعة النقاط التي تكون عندها النهاية موجودة .....

⑧ ما مجموعة النقاط التي تكون عندها فقط النهاية من اليسار موجودة .....

❷ ***استخدم الشكل المجاور وأجب عن الأسئلة الآتية :***



❶ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)} =$ ..... ❷ $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{f(x)} =$ .....

❸ فسر لماذا لا يمكن استخدام التعويض لتحديد $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1}$ ثم أوجد النهاية

.....

.....

.....

.....

.....

❹ فسر لماذا لا يمكن استخدام التعويض لتحديد $\lim_{x\to -3} \dfrac{f(x)}{x+3}$ ثم أوجد النهاية

.....

.....

.....

.....