خواص النهايات

❖ **نهاية الدالة الثابتة :** $\lim\limits_{x\to c} k = k$ (حيث k عدد ثابت)

مثال : $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2}{3} =$, $\lim\limits_{x\to -2}\pi =$, $\lim\limits_{x\to 1} 4 =$

❖ **نهاية الدالة المحايدة :** إذا كانت $f(x) = x$ فإن $x = \lim\limits_{x\to c} c$

مثال : $x\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} =$, $x\lim\limits_{x\to -1} =$, $\lim\limits_{x\to 3} x =$

نظرية (1) :

إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ حيث $L, M, c, k \in \mathcal{R}$ فإن :

① $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \pm M$

② $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \times g(x)\big) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \times \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \times M$

③ $\lim\limits_{x\to c} k \times f(x) = k \times \lim\limits_{x\to c} f(x) = k \times L$ (حيث k عدد ثابت)

④ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$; $M \neq 0$

⑤ $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = (L)^{\frac{r}{s}}$ (حيث r, s عددين صحيحين ، $s \neq 0$, $(L)^{\frac{r}{s}}$ عدد حقيقي)

نظرية (2) :

1) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ دالة كثيرة حدود ، c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$$

2) إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ كثيرتي حدود ، c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad ; \; g(c) \neq 0$$

تدريب : أوجد النهاية لكلٍ مما يلي :

ⓐ $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 + x - 3)$ .....

ⓑ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$ .....

ⓒ $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2 - 3x - 6)^{\frac{-2}{3}}$ .....

تمرين (4) : أوجد النهاية لكلٍ مما يلي :

① $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{1-3x}{2x-3}$

② $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} (8x^2-3)^{96}$

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cos x+1}{5x-2}$

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (\dfrac{3}{\pi}x+\sin x)$

⑤ $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{16-x}{\sqrt{x}-4}$

⑥ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+2)^2-1}{x+1}$

⑦ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

⑧ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+4x^2}{3x^4-8x^2}$

⑨ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6-x-x^2}{2x^3-16}$

⑩ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)^2-(3-x)^2}{x^2-2x}$

⑪ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{3}x-1}{x^2-9}$

⑫ $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$

ABOU GHANI M.Z

تمرين (5) : *اشرح لماذا لا يمكنك التعويض لتحديد النهاية . ثم أوجد كلاً من النهايات الآتية :*

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$

② $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

③ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}-1}$

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\frac{4}{x}}{x-2}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2}\right)$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+4)^{-1}-(4)^{-1}}{x}$

⑦ $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{16}{x^2-16}\right)$

⑧ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{18}{x^2-9}\right)$

ABDUL GHANI M.Z

النهاية من جهة واحدة و من الجهتين :

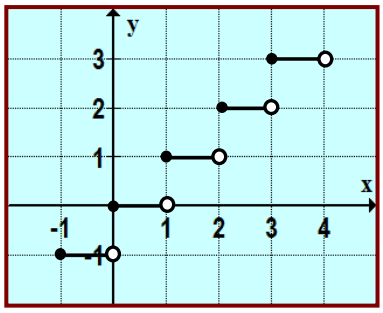
❖ **النهاية من اليمين :** $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ أي نهاية الدالة عندما تقترب x من c من جهة اليمين .

❖ **النهاية من اليسار :** $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ أي نهاية الدالة عندما تقترب x من c من جهة اليسار.

نظرية (3) :

الدالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند c موجودتين ومتساويتين أي أن:

$$f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=L \iff \lim_{x\to c}\ \lim_{x\to c^-} f(x)=L$$



مثال : الدالة $f(x)=[x]$ لها نهايات مختلفة جهة اليمين و جهة اليسار

$\lim\limits_{x\to 1^+}[x]=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}[x]=0$ ⇐ الدالة $[x]$ ليس لها نهاية عند $x\to 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+}[x]=1$, $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]=0$ ⇐ الدالة $[x]$ ليس لها نهاية عند $x\to 2$

❖ **بصفة عامة** الدالة $f(x)=[x]$ ليس لها نهاية عند أي عدد صحيح

$\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$, $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$ ⇐ $\lim\limits_{x\to n}[x]$ غير موجودة حيث n عدد صحيح

أما إذا كانت m عدد غير صحيح فإن : $\lim\limits_{x\to m}[x]=[m]$

❖ من خواص دالة الصحيح : $[x+a]=[x]+a$ حيث a عدد صحيح

تدريب : ***أوجد كلاً من النهايات الآتية مفسراً إجابتك :***

① $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]$ *1*

② $\lim\limits_{x\to \pi}[x]$ *3*

③ $\lim\limits_{x\to 3^+}[x-6]$ ..... *-3*

④ $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-2}$ *1*

⑤ $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$ ..... *غ.م*

⑥ $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}$ ..... *غ.م*

⑦ $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}$ *0*

⑧ $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-[x]}{4-x}$ ..... *-1*

⑨ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}$ *0*

تمرين (6) :

❶ إذا كان $f(x)=\begin{cases}2x+3 & : x\geq 2\\ 3x-1 & : x<2\end{cases}$ أوجد كلاً من :

① $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ .....

② $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ .....

③ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ .....

❷ إذا كان $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^3-1} & : x\neq 1\\ 3 & : x=1\end{cases}$ أوجد كلاً من : ① $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ، ② $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

.....

.....

.....

.....

❸ إذا كان $g(x)=\begin{cases}[x]+3 & : x<0\\ 2\cos x & : x\geq 0\end{cases}$ أوجد كلاً من : ① $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$ ، ② $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

.....

.....

.....

.....

❹ إذا كان $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x-1]}{x-1} & : x>1\\ x^2-1 & : x\leq 1\end{cases}$ أوجد كلاً من : ① $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ② $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

.....

.....

.....

.....

ABDULGHANI.M.Z

تمرين (7) : أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} (x + [x])$

② $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} (1 + x[x])$

③ $\lim\limits_{x\to\frac{7}{2}} ([x] + \frac{1}{2})$

④ $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{[x] - 1}{1 - x}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{|x| - 4}{x - [x]}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (6x + [-2x])$

⑦ $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{[x]}$

⑧ $\lim\limits_{x\to 1} (2 - x)^{[x]}$

ABDU GHANI

تذكر أن :

❖ $y = |x - a|$ تكتب دون استخدام رمز القيمة المطلقة كالآتي : $|x-a| = \begin{cases} x-a & : x \geq a \\ a-x & : x < a \end{cases}$

❖ من خواص المطلق : $|x - a| = |a - x|$ ، $\sqrt{x^2} = |x|$

تمرين (8) : أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-2|-1}{x^2-1}$

② $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|-1}{|x-1|+3}$

③ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|4-x|-x}{x-2}$

④ $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x^2-3x}$

⑤ $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3-|x-2|}{|x-6|-1}$

⑥ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-|1-x|}{x^2-4}$

⑦ $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{|x-7|}{x^2-49}$

⑧ $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{|x+3|}{x^2-2x-15}$

ABDU GHANI M.Z

تمرين (9) : أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3}$

② $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x - 1}$

③ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 2}$

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

⑤ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

⑥ $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2 - \sqrt{1 - x}}{x + 3}$

ABDULGHANI ZAITOUN