نهايات الدوال الدائرية

تذكر أن

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ ,\ \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x=\frac{1}{\cot x}\ ,\ \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \begin{cases}\sin^2 x=1-\cos^2 x\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

تذكرأن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{Lx}=\frac{K}{L}\ ;\ L\neq 0\ ,K\neq 0$$

إذا كانت $f(x)\to 0$ عندما $x\to K$ فإن :

$$\lim_{x\to k}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

تمرين (10) : أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x-\sin 2x}{3x}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x\cos x}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 2x}{\cos x+\tan x}$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{2x\sin x}$

ABDU GHANI

⑦ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \ \tan x}{3x^2}$

⑧ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x \ \tan 3x}{2x + \tan x}$

⑨ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin^2 x}{3x^2 + 2x}$

⑩ $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x + x^3 \cot x}{x \cot x}$

⑪ $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$

⑫ $\lim_{x\to 0} 4x(\sec x - \cot 2x)$

⑬ $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x \cot x}{|x|}$

⑭ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \ \cos x}{\sqrt{x+1} - 1}$

ABDU GHANI

نظرية الإحاطة

إذا كانت $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل $x \neq c$ في فترة حول c
وكان $\lim_{x\to c} h(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = L$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$

تمرين (11) : أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

② $\lim_{x\to 0} (4 - x^2 \sin\frac{3}{x})$

③ إذا كان $|f(x) - 3| \le x^2$ أوجد : $\lim_{x\to 0} f(x)$

④ إذا كان $x + \sin x \le f(x) \le x^2 + 2x$ أوجد : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

ABDULGHANI ZEITOUN

⑤ إذا كان $\frac{3x^2+\sin x}{2x} \le f(x) \le 1-\frac{1}{2\cos x}$ أوجد : $\lim_{x\to 0} f(x)$

⑥ إذا كان $x^2 - x^3 \le x^2 f(x) \le x\sin x + \tan^3 x$ أوجد : $\lim_{x\to 0} f(x)$

⑦ إذا كانت $x^4 - 1 \le x f(x) - f(x) \le x^2 + 2x - 3$ أوجد : $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

تمرين (12) :

❶ إذا كان $f(x)=\begin{cases} 2-x & : -1\le x<2 \\ \sqrt{x} & : 2\le x\le 4 \end{cases}$ أجب عما يأتي :

(a) عند أي نقاط c في مجال f تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة ؟

(b) عند أي نقاط c تكون فقط النهاية لجهة اليمين موجودة ؟

(c) عند أي نقاط c تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة ؟

.....

.....

.....

❷ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x+3a & : x>3 \\ 3x-1 & : x<3 \end{cases}$ أوجد قيمة a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجودة

.....

.....

.....

❸ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x>b \\ 2x+1 & : x<b \end{cases}$ أوجد قيمة b التي تجعل $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ موجودة

.....

.....

.....

.....

❹ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2x-4}{x-2} & : x\neq 2 \\ 4 & : x=2 \end{cases}$ أوجد قيمة a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة

.....

.....

.....

.....

ABDULGHANI.M

❺ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2+a & : x>-1 \\ 2x+b & : x<-1 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ أوجد قيمة كل من $a\ ,\ b$

❻ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x+a & : x>b \\ 3x-2a & : x<b \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to b} f(x)=5$ أوجد قيمة كل من $a\ ,\ b$

❼ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & : x<2 \\ 3x-b & : x>2 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to -3} f(x)=6$ ، $\lim_{x\to 3} f(x)=4$

أوجد قيمة كل من $a\ ,\ b$

ABDU GHANI